This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Digitized by Google

SCIENCE CENTER LIBRARY

Math 4508.98.6

Harvard College Library

BOUGHT WITH INCOME

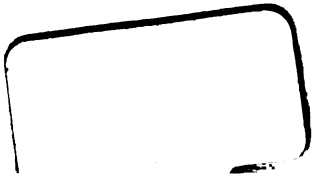
FROM THE BEQUEST OF

HENRY LILLIE PIERCE,

OF BOSTON.

Under a vote of the President and Fellows,
October 24, 1898.

1 April, 1899.



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

A1226

Störungstheorie

und

Berührungstransformationen.

Inaugural-Dissertation

der

philosophischen Fakultät

der

Universität Leipzig

zur

Erlangung des Doktorgrades

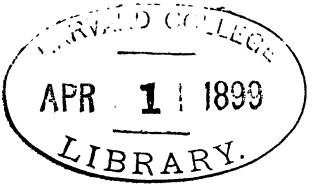
vorgelegt von

Camillo Grötzsch.

Leipzig-R.
Druck von Oswald Schmidt.
1898.

Digitized by Google

Math 4508.98.6



Pierce fund

163

Digitized by Google

Die allgemeine Theorie der Berührungstransformationen und Funktionengruppen wurde von Lie in den Jahren 1870 bis 1872 begründet. Eine ausführliche Darstellung und Begründung dieser Untersuchungen legte er der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania im März und Juni 1873 vor. Unter den vielen Vorläufern dieser Theorie, deren Anfänge sowohl in der Geometrie bei Euler, Lagrange, Legendre und Plücker als auch in der Analysis bei Ampère und in der angewandten Mathematik bei Huyghens zu suchen sind, nehmen Poisson und Lagrange, sowie Hamilton und Jakobi in ihren Untersuchungen über Störungstheorie eine hervorragende Stelle ein. Die ganze Theorie der Störungen lässt sich in der That als ein Abschnitt aus der allgemeinen Theorie der Berührungstransformationen betrachten. Diese Auffassung tritt in Lies Arbeiten aus den Monaten März und Juni des Jahres 1873 deutlich hervor, wenn sie auch nicht im einzelnen durchgeführt wird. Der Aufgabe, den Zusammenhang zwischen dem Störungsproblem und der Theorie der Berührungstransformationen, der von Lies Standpunkt aus ohne weiteres klar ist, eingehend und explicite durch analytische Betrachtungen darzuthun, hat sich Lie im Jahre 1876 im norwegischen Archiv in der Abhandlung „Die Störungstheorie und die Berührungstransformationen“ unterzogen. Nach Lie stellen nämlich die Gleichungen

$$\delta q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta t,\ \delta p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta t\ (i = 1 \ldots n)$$

eine infinitesimale Berührungstransformation dar, und es handelt sich bei der Lösung des Störungsproblems nur darum, die allgemeinste Transformation zu bestimmen, vermöge deren

Digitized by Google

sämtliche infinitesimale Berührungstransformationen in infinitesimale Berührungstransformationen übergeführt werden oder, was dasselbe sagt, die unendliche Gruppe aller verkürzten Berührungstransformationen invariant bleibt. Dass einer jeden Berührungstransformation diese Eigenschaft zukommt, ist unmittelbar evident. Das Störungsproblem hat somit seine Erledigung gefunden, indem es dem allgemeinen Problem der Bestimmung aller endlichen verkürzten Berührungstransformationen untergeordnet ist.

Im November 1873 und im darauffolgenden Jahre legte nun Schering der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen zwei Abhandlungen vor, in denen er sich mit der Transformationstheorie der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen beschäftigt. Sie sind betitelt: „Hamilton-Jakobische Theorie für Kräfte, deren Mass von der Bewegung der Körper abhängt“ und „Verallgemeinerung der Poisson-Jakobischen Störungsformeln“. Scherings Arbeiten haben mannigfache Berührungspunkte mit den älteren Arbeiten Lies. Da dieser Zusammenhang bei Schering nicht hervortritt und überdies Scherings Entwicklungen wesentlich an Durchsicht gewinnen, wenn die Begriffe Berührungstransformation und Funktionengruppe eingeführt werden, wollen wir in dieser Arbeit diesen Zusammenhang darlegen und zeigen, wie die Probleme, mit deren Lösung Schering sich befasst, vermittels der Theorie der Berührungstransformationen und Funktionengruppen ihre angemessene Behandlung finden. Wir werden uns dabei im Laufe dieser Arbeit überzeugen können, dass die Transformationen, deren sich Schering in seinen Abhandlungen bedient, nicht die allgemeinsten Transformationen sind, die den kanonischen Charakter des Systems dynamischer Differentialgleichungen bewahren, sondern der unendlichen Gruppe aller verkürzten Berührungstransformationen angehören.

Lie sagt, dass eine Transformation

$$z' = Z(z, x_1 \dots x_n, p_1 \dots p_n),\ x'_i = X_i(z, x_1 \dots x_n, p_1 \dots p_n),$$
$$p'_i = P_i(z, x_1 \dots x_n, p_1 \dots p_n)$$

in den Veränderlichen $z, x_1 \dots x_n, p_1 \dots p_n$ eine Berührungs-

Digitized by Google

transformation ist, wenn eine Bedingungsgleichung von der Form

$$dZ - \sum_1^n{}_i P_i \, dX_i = \varrho (dz - \sum_1^n{}_i p_i \, dx_i)$$

besteht. Er betrachtet insbesondere den Fall, dass die Funktionen $X_1 \dots X_n$, $P_1 \dots P_n$ nur von $x_1 \dots x_n$, $p_1 \dots p_n$ abhängen, während Z die Form $z + \Omega (x_1 \dots x_n, p_1 \dots p_n)$ hat. Alsdann nimmt die obige Bedingungsgleichung die Gestalt

$$\sum_1^n{}_i P_i \, dX_i - d\Omega = \sum_1^n{}_i p_i \, dx_i$$

an, und die Gleichungen

$x'_i = X_i (x_1 \dots x_n, p_1 \dots p_n)$, $p'_i = P_i (x_1 \dots x_n, p_1 \dots p_n)$

bestimmen eine verkürzte Berührungstransformation

Erster Teil.

Transformationstheorie der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen: $\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$.

In dem ersten Teil dieser Arbeit werden wir die Transformationstheorie der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

wo H eine beliebige Funktion der Zeit t und der von einander unabhängigen Veränderlichen $q_1 \dots q_n$, $p_1 \dots p_n$ bedeutet, entwickeln, um sodann zu zeigen, dass die Transformationen, deren sich Schering in seiner Abhandlung: „Hamilton-Jakobische Theorie für Kräfte, deren Mass von der Bewegung der Körper abhängt" bedient, eine besondere Klasse von Berührungstransformationen darstellen, bei denen die 2n Veränderlichen $q_1 \dots q_n$, $p_1 \dots p_n$ für sich allein transformiert werden. Hierbei sei es uns verstattet, von der Form, in der Schering seine Untersuchungen anstellt und die erhaltenen Resultate ausspricht, nicht unwesentlich abzuweichen und dieselbe in der gebräuchlicheren Weise darzubieten.

Digitized by Google

Erstes Kapitel.

Die Differentialgleichungen der Bewegung.

Schering bestätigt in seiner ersten Abhandlung, dass das Gauss'sche Prinzip des kleinsten Zwanges genügt, um in einem μ-fach ausgedehnten Raume, dessen Bogenelement durch die ν-te Wurzel eines nicht reducierbaren homogenen Ausdrucks ν-ten Grades der Differentiale der μ Koordinaten, nämlich durch

$$(A) \qquad ds = \sqrt[\nu]{\sum_{h_1 \ldots h_\nu}^{1 \ldots \mu} X_{h_1 \ldots h_\nu} dx_{h_1} \ldots dx_{h_\nu}} = \sqrt[\nu]{\mathfrak{T}}$$

dargestellt wird, die Bewegung eines beliebigen Massensystems zu bestimmen, sobald man nur die Bewegung eines einzelnen freien Massenpunktes kennt oder die zur Kenntnis derselben führenden notwendigen und hinreichenden Voraussetzungen macht. Diese Voraussetzungen sind die beiden folgenden:

„Ein einzelnes, frei bewegliches Massenteilchen, auf welches keine Kraft wirkt, bewegt sich in einer kürzesten Linie des Raumes mit unveränderlicher Geschwindigkeit und beschreibt in gleichen Zeitabschnitten gleich grosse Wegstrecken."

„Ein einzelnes, frei bewegliches Massenteilchen m, welches augenblicklich in Ruhe ist, aber unter der Einwirkung einer Kraft R steht, beginnt eine Bewegung in der Richtung der Kraft R mit der Beschleunigung $\frac{R}{m}$, wird also in jener Richtung während des nächsten Zeitelements dt den Weg $\frac{1}{2}\frac{R}{m}dt^2$ zurücklegen."

Geht man von diesen Voraussetzungen aus, so lässt sich, wie bereits erwähnt worden, die Bewegung eines beliebigen Massensystems ermitteln, wenn man das von Gauss aufgestellte Prinzip des kleinsten Zwanges zu Hülfe nimmt. Dasselbe lautet in der Form, wie es Schering ausspricht:

„Die Bewegung eines Systems materieller, auf was immer für eine Art unter sich verknüpfter Punkte, deren Bewegungen zugleich an was immer für äussere Beschränkungen gebunden sind, geschieht in jedem Augenblicke in möglichst

Digitized by Google

grösster Übereinstimmung mit der freien Bewegung, oder unter möglichst kleinstem Zwange, indem man als Mass des Zwanges, den das ganze System in jedem Zeitteilchen erleidet, die Summe der Produkte aus dem Quadrate der Ablenkung jedes Punktes von seiner freien Bewegung in seine Masse betrachtet."

Auf dieses Prinzip und die beiden obigen Voraussetzungen stützt sich nun Schering, um die Bewegungsgleichungen eines Systems von Massenpunkten abzuleiten. Er findet, dass in einem μ-fach ausgedehnten Raume mit dem Längenelement (A) der Ausdruck

$$(B) \qquad -\sum_{m} m\left(\frac{1}{\nu}\delta\mathfrak{T} - d\mathfrak{D}\right) - \sum_{i} R_i \delta r_i dt^{\nu},$$

wo $$\mathfrak{D} = \sum_{h_1 \dots h_\nu}^{1 \dots \mu} X_{h_1 \dots h_\nu} \delta x_{h_1} dx_{h_2} \dots dx_{h_\nu}$$

ist, ferner R_i die wirkenden Kräfte und δr_i die von den Massenteilchen in der Richtung dieser Kräfte ausgeführten sogenannten virtuellen Bewegungen bedeuten, für eine stetige Bewegung der Massenteilchen nie negativ werden darf, dass der Ausdruck (B) demnach verschwinden muss, sobald auf Grund der für die Bewegung gegebenen Bedingungen zu jeder möglichen Bewegung auch die in entgegengesetztem Sinne möglich ist. Bezeichnet man sodann alle Koordinaten $x_1^{(i)} \dots x_\mu^{(i)}$ der Massenteilchen m_i der Reihe nach mit $\xi_1, \xi_2 \dots$ und setzt

$$(C) \qquad \sum_{i} m_i \sum_{h_1 \dots h_\nu}^{1 \dots \mu} X_{h_1 \dots h_\nu} x_{h_1}^{(i)'} \dots x_{h_\nu}^{(i)'} = \nu T,$$

wo $$x_h^{(i)'} = \frac{dx_h^{(i)}}{dt}$$

ist und T die von Leibnitz für den Fall $\nu = 2$ so benannte lebendige Kraft bedeutet, so erhält man als Grundgleichung der Bewegung

$$(D) \qquad -\delta T + \frac{d}{dt}\sum_{k} \frac{\theta T}{\theta \xi'_k} \delta\xi_k - \sum_{i} R_i \delta r_i = 0,$$

wenn bei der partiellen θ-Differentiation die Grössen ξ_k und $\xi'_k = \frac{d\xi_k}{dt}$ als von einander unabhängig betrachtet werden

Digitized by Google

und die Summation nach k über alle Koordinaten aller Massenteilchen ausgedehnt zu denken ist. Lagrange hat nun zuerst bemerkt, dass für die meisten Naturkräfte $\sum_i R_i \delta r_i$ die totale Variation einer Funktion ist, die allein von den Koordinaten der Massenpunkte abhängig ist. Gauss dagegen hat als der erste auch Kräfte in seine Betrachtungen gezogen, deren Mass nicht nur von der Lage, sondern auch von dem jeweiligen Bewegungszustande der Massenteilchen abhängt. Wir werden nun mit Schering voraussetzen, diese Abhängigkeit sei eine solche, dass $\sum_i R_i \delta r_i$ die Differenz einer totalen Variation und eines totalen Differentialquotienten nach der Zeit werde, und zwar sei die totale Variation

$$= \delta V$$

und die Derivierte nach der Zeit

$$= \frac{d}{dt}\left[\sum_k \frac{\theta V}{\theta \xi'_k}\delta \xi_k + \sum_k \frac{\theta V}{\theta \xi''_k}\delta \xi'_k + \ldots\right],$$

wobei wir V als Kräftefunktion bezeichnen. Im Folgenden werden wir uns aber nur auf den Fall beschränken, wo die Kräftefunktion V keine höheren Derivierten als die ersten ξ'_k enthält. Es ist dann

$$\sum_i R_i \delta r_i = \delta V - \frac{d}{dt}\sum_k \frac{\theta V}{\theta \xi'_k}\delta \xi_k,$$

und die Fundamentalgleichung der Bewegung stellt sich in der Form

$$(1) \qquad -\delta(T+V) + \frac{d}{dt}\sum_k \frac{\theta(T+V)}{\theta \xi'_k}\delta \xi_k = 0$$

dar. Hier lässt sich ohne Schwierigkeit zeigen, dass der Ausdruck $\sum_k \frac{\theta(T+V)}{\theta \xi'_k}\delta \xi_k$ stets denselben Wert beibehält, welche feste oder bewegliche, von einander abhängige oder unabhängige Koordinaten ξ_k auch zu Grunde gelegt werden mögen. Führen wir also in die Gleichung (1) solche neue, von einander unabhängige Variable $q_1 \ldots q_n$ ein, dass die ξ_k als Funktionen von t, $q_1 \ldots q_n$ auftreten, und setzen wir mit Lagrange

Digitized by Google

(2) $$\frac{\theta(T+V)}{\theta q'_k} = p_k,$$

so nimmt die Fundamentalgleichung der Bewegung (1) die folgende Form an:

(3) $$\sum_1^n \left[\frac{dp_i}{dt} - \frac{\theta(T+V)}{\theta q_i}\right] \delta q_i = 0.$$

Zweites Kapitel.

Die Bewegungsgleichungen in der Hamiltonschen Form.

Wir haben oben die partielle Differentiation nach den Veränderlichen $t, q_1 \dots q_n, q'_1 \dots q'_n$ mit θ bezeichnet. Wir eliminieren jetzt aus (3) vermöge der Gleichungen (2) die Grössen $q'_1 \dots q'_n$ und deuten dann die nach den Variablen $t, q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n$ genommene partielle Differentiation mit δ an. Es erhebt sich sodann die Frage, wie sich die Differentialgleichung (3) der Bewegung nach dieser Substitution umgestaltet. Untersuchen wir dies im Folgenden. Es ist, wenn man $T+V$ als Funktion von $t, q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n$ ansieht,

$$d(T+V) = \frac{\delta(T+V)}{\delta t} dt + \sum_1^n \frac{\delta(T+V)}{\delta q_i} dq_i + \sum_1^n \frac{\delta(T+V)}{\delta p_i} dp_i.$$

Andererseits ist aber

$$d(T+V) = \frac{\theta(T+V)}{\theta t} dt + \sum_1^n \frac{\theta(T+V)}{\theta q_i} dq_i + \sum_1^n \frac{\theta(T+V)}{\theta q'_i} dq'_i$$

$$= \frac{\theta(T+V)}{\theta t} dt + \sum_1^n \frac{\theta(T+V)}{\theta q_i} dq_i + \sum_1^n \left[\frac{\theta(T+V)}{\theta q'_i}\left(\frac{\delta q'_i}{\delta t} dt + \sum_1^n \left(\frac{\delta q'_i}{\delta q_\nu} dq_\nu + \frac{\delta q'_i}{\delta p_\nu} dp_\nu\right)\right)\right].$$

Demnach ergiebt sich

$$\frac{\delta(T+V)}{\delta t} = \frac{\theta(T+V)}{\theta t} + \sum_1^n \frac{\theta(T+V)}{\theta q'_i} \frac{\delta q'_i}{\delta t}$$

$$= \frac{\theta(T+V)}{\theta t} + \sum_1^n p_i \frac{\delta q'_i}{\delta t},$$

Digitized by Google

$$\frac{\partial(T+V)}{\partial q_\nu} = \sum_1^n i \frac{\partial(T+V)}{\partial q'_i}\frac{\partial q'_i}{\partial q_\nu} + \frac{\partial(T+V)}{\partial q_\nu} = \sum_1^n i\, p_i \frac{\partial q'_i}{\partial q_\nu} + \frac{dp_\nu}{dt},$$

$$\frac{\partial(T+V)}{\partial p_\nu} = \sum_1^n i \frac{\partial(T+V)}{\partial q'_i}\frac{\partial q'_i}{\partial p_\nu} = \sum_1^n i\, p_i \frac{\partial q'_i}{\partial p_\nu}.$$

Setzt man hierauf

$$(4) \qquad H = -(T+V) + \sum_1^n i\, p_i q'_i$$

und führt vermöge (4) anstelle von $(T+V)$ die Funktion H in die drei obigen Gleichungen ein, so gelangt man zu den folgenden Gleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = q'_i = \frac{dq_i}{dt},$$

$$-\frac{\partial H}{\partial q_i} = p'_i = \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial(T+V)}{\partial q_i},$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = H' = \frac{dH}{dt} = -\frac{\partial(T+V)}{\partial t},$$

von denen die letztere eine Folge der $2n$ vorhergehenden Differentialgleichungen ist. Somit haben wir die neue und wichtige Form der Bewegungsgleichungen gefunden, wie sie Hamilton unter specielleren Voraussetzungen als jene, die hier zu Grunde liegen, zum ersten Male aufgestellt hat.*) Dieselben sind also

$$(5) \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad (i = 1 \ldots n)$$

wo die von Jakobi so benannte Hamiltonsche Funktion H von den Grössen $t, q_1 \ldots q_n, p_1 \ldots p_n$ abhängt.

Die Funktion H erhält eine einfachere Gestalt, sobald die Veränderlichen $q_1 \ldots q_n$ im Raume feste Koordinaten bedeuten. Alsdann wird nämlich T eine homogene Funktion ν-ten Grades von $q'_1 \ldots q'_n$, und nach dem Eulerschen Satze über homogene Funktionen besteht die Relation

$$\sum_1^n i\, q'_i \frac{\partial T}{\partial q'_i} = \nu T.$$

---

*) Second Essay on a General Method in Dynamics. By William Rowan Hamilton. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. For the year MDCCCXXXV.

Digitized by Google

Enthält überdies die Kräftefunktion V die Variablen $q'_1 \dots q'_n$ nicht, so wird nach den Definitionsgleichungen (2) des ersten Kapitels auch

$$\sum_1^n{}_i q'_i \, p_i = \nu T,$$

und man bekommt

$$H = (\nu - 1) T - V,$$

was sich für den Fall $\nu = 2$ auf

$$H = T - V$$

reduciert. Hängt endlich V von der Zeit t nicht noch explicite ab, so wird

$$\frac{dH}{dt} = 0$$

und also H ein Integral der Bewegungsgleichungen (5) des mechanischen Problems, nämlich das Integral der lebendigen Kraft.

Drittes Kapitel.

Scherings Substitutionstheorie.

Wie aus den Bewegungsgleichungen (3) auf Seite 9 ersichtlich ist, ist die Funktion $T + V$ ursprünglich als Funktion von $t, q_1 \dots q_n, q'_1 \dots q'_n$ gegeben. Auf diese Funktion führt Schering eine allgemeine Differentiation aus, die er mit D bezeichnet. Es ist dann unmittelbar

$$D(T+V) = \frac{\theta(T+V)}{\theta t} Dt + \sum_1^n{}_i \frac{\theta(T+V)}{\theta q_i} Dq_i$$

$$+ \sum_1^n{}_i \frac{\theta(T+V)}{\theta q'_i} Dq'_i.$$

Berücksichtigt man die Definitionsgleichungen (2) und die Differentialgleichungen (3) des mechanischen Problems und bedenkt, dass die Differentiationen D und d als von einander unabhängig angesehen werden und daher in ihrer Reihenfolge vertauschbar sind, so erhält man die Beziehung

Digitized by Google

$$(6) \quad D(T+V) = \frac{d}{dt}(T+V-\sum_1^n{}^i p_i q'_i)\,Dt + \sum_1^n{}^i p'_i\,Dq_i + \sum_1^n{}^i p_i\,Dq'_i.$$

Subtrahiert man von beiden Seiten dieser Gleichung die Identität

$$D\sum_1^n{}^i p_i q'_i = \sum_1^n{}^i q'_i\,Dp_i + \sum_1^n{}^i p_i\,Dq'_i$$

und schreibt wieder

$$(4) \quad -(T+V)+\sum_1^n{}^i p_i q'_i = H$$

und endlich zur Abkürzung

$$\frac{dH}{dt} = H',$$

so bekommt man

$$(7) \quad DH = H'Dt + \sum_1^n{}^i q'_i\,Dp_i - \sum_1^n{}^i p'_i\,Dq_i,$$

woraus sich, da die Veränderlichen $q_1 \dots q_n$ als von einander unabhängig vorausgesetzt wurden, die Gleichungen Hamiltons

$$(5) \quad \begin{cases} \dfrac{dq_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}, \\ (i = 1 \dots n) \\ \dfrac{dH}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial t} \end{cases}$$

ergeben. Schering fährt nun fort — und so wenden wir uns zu seiner Substitutionstheorie —, Systeme von zusammengehörigen Veränderlichen zu bestimmen, die durch Einführung in die Bewegungsgleichungen die kanonische Form derselben bewahren. Die Gleichung, die die Variablen $q_1 \dots q_n$, $p_1 \dots p_n$ als kanonische charakterisierte, war die Gleichung (6), die auch folgendermassen geschrieben werden kann

$$D(T+V) = \frac{d}{dt}\left[(T+V-\sum_1^n{}^i p_i q'_i)\,Dt + \sum_1^n{}^i p_i\,Dq_i\right].$$

Sollen nun irgend welche neue Veränderliche die kanonische Gestalt der Bewegungsgleichungen unberührt lassen, so kann man die Bedingung dafür offenbar erreichen, wenn

Digitized by Google

man in der vorstehenden Gleichung für die Funktion $T+V$ eine andere, etwa $T+V-S'$ setzt. Wir thuen dies und erhalten somit

$$D(T+V-S') = \frac{d}{dt}\left[(T+V-S'-\sum_1^n{}^i \varphi_i \psi'_i)\,Dt + \sum_1^n{}^i \varphi_i D\psi_i\right],$$

wenn die neuen Variablen $\psi_1 \ldots \psi_n$, $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ sind. Nach Substraktion dieser Gleichung von der vorhergehenden ergiebt sich

$$DS' = \frac{d}{dt}\left[(S'+\sum_1^n{}^i \varphi_i \psi'_i - \sum_1^n{}^i p_i q'_i)\,Dt - \sum_1^n{}^i \varphi_i D\psi_i + \sum_1^n{}^i p_i Dq_i\right].$$

Schering schliesst — und diese Folgerung ist von Wichtigkeit —, dass S' gleich sein muss einem vollständigen nach der Zeit t genommenen Differentialquotienten einer Funktion S, wenn diese Substitutionsgleichung unabhängig von der besonderen Form der Gleichungen eines bestimmten mechanischen Problems gelten soll. Hieraus ersieht man, dass die Transformationen, mit denen sich Schering beschäftigt, nicht die allgemeinsten sind, die das vorgelegte kanonische System der Bewegungsgleichungen in ein ähnliches überführen; und man kann jetzt schon ohne Bedenken behaupten, dass Scherings Transformationen sich vollständig mit einer speciellen Klasse der Lieschen Berührungstransformationen decken. Die Bestätigung hierfür werden wir weiter unten im fünften Kapitel geben. Setzen wir daher mit Schering

$$S' = \frac{dS}{dt},$$

so gelangen wir zur folgenden Substitutionsgleichung

$$(8) \qquad DS = -E\,Dt + \sum_1^n{}^i p_i Dq_i - \sum_1^n{}^i \varphi_i D\psi_i,$$

worin

$$(9) \qquad E = \sum_1^n{}^i p_i \frac{dq_i}{dt} - \sum_1^n{}^i \varphi_i \frac{d\psi_i}{dt} - \frac{dS}{dt}$$

Digitized by Google

ist. Hier genügt aber die Gleichung (8), um die neuen Veränderlichen als ein kanonisches System zu kennzeichnen, da die Gleichung (9) aus (8) als ein specieller Fall der D-Differentiation hervorgeht. Führen wir in die Gleichung (8) die Hamiltonsche Funktion H ein, so nimmt dieselbe eine neue Gestalt an, nämlich

$$D(H-E) = (H'-E')\,Dt + \sum_1^n{}_i \psi'_i\, D\varphi_i - \sum_1^n{}_i \varphi'_i\, D\psi_i,$$

worin $E' = \frac{dE}{dt}$ ist.

Betrachtet man sodann $H-E$ als Funktion von t, $\psi_1 \dots \psi_n$, $\varphi_1 \dots \varphi_n$ und bezeichnet, wie wir es in Zukunft immer halten werden, die partiellen Ableitungen nach diesen Grössen mit ϑ, so werden die Bewegungsgleichungen (5) in die folgenden

$$(10)\quad \begin{cases} \frac{d\psi_i}{dt} = \frac{\vartheta(H-E)}{\vartheta\varphi_i}, \quad \frac{d\varphi_i}{dt} = -\frac{\vartheta(H-E)}{\vartheta\psi_i}, \quad (i=1\dots n) \\ \frac{d(H-E)}{dt} = \frac{\vartheta(H-E)}{\vartheta t} \end{cases}$$

transformiert. Hierauf sucht Schering die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die durch die Substitutionsgleichungen eingeführten Veränderlichen $\psi_1 \dots \psi_n$, $\varphi_1 \dots \varphi_n$ auch ein System von kanonischen Variablen bilden, in einer den von Lagrange und Poisson gefundenen Störungsformeln entsprechenden Form darzustellen. Er verfährt in folgender Weise. Es ist nach (8)

$$(8)\qquad DS = \sum_1^n{}_i p_i\, Dq_i - \sum_1^n{}_i \varphi_i\, D\psi_i - E\,Dt$$

und, wenn das Zeichen Δ eine von der D-Differentiation unabhängige Differentiation vertritt, ebenso

$$\Delta S = \sum_1^n{}_i p_i\, \Delta q_i - \sum_1^n{}_i \varphi_i\, \Delta\psi_i - E\,\Delta t.$$

Führt man nun auf die beiden Seiten der Gleichung (8) die Δ-Differentiation und auf die beiden Seiten der letzten Gleichung die D-Differentiation aus und subtrahiert dann die beiden so erhaltenen Gleichungen von einander, so folgt die Relation

Digitized by Google

$$(11)\quad \sum_{i}^{n}(Dq_i.\Delta p_i - \Delta q_i.Dp_i) = \sum_{i}^{n}(D\psi_i.\Delta\varphi_i - \Delta\psi_i.D\varphi_i) + Dt.\Delta E - \Delta t.DE,$$

die die Bedingung in sich schliesst, dass die Grössen $\psi_1 \dots \psi_n$, $\varphi_1 \dots \varphi_n$ kanonische Veränderliche sind. Indem Schering überdies nachweist, dass die Bedingung (11) auch hinreichend ist, um den Variablen $\psi_1 \dots \psi_n$, $\varphi_1 \dots \varphi_n$ den Charakter von kanonischen Veränderlichen zu geben, kann er, nachdem er noch den Ausdruck $Dq_i.\Delta p_i - \Delta q_i.Dp_i$ eine Differentialdeterminante von dem Funktionenpaar q_i und p_i genannt, den folgenden Satz aussprechen:

„Bilden die $q_1 \dots q_n$ und $p_1 \dots p_n$ ein System kanonischer Veränderlicher, so ist, damit die durch die vorgegebenen Substitutionsgleichungen eingeführten Grössen $\psi_1 \dots \psi_n$ und $\varphi_1 \dots \varphi_n$ allgemein auch ein System kanonischer Veränderlicher bilden, notwendig und hinreichend, dass die Summe der allgemeinen zweigliedrigen Differentialdeterminanten von allen zusammengehörigen Paaren q_ι und p_ι sich von der ebenso aus ψ_ι und φ_ι gebildeten Summe nur um die zweigliedrige Differentialdeterminante von der Veränderlichen t und irgend einer Funktion E unterscheidet."

In diesem Satze ist das Hauptergebnis der ersten Abhandlung Scherings enthalten. Aus dem wichtigen Resultate nun, welches der obige Satz darbietet, leitet dann Schering durch geeignete Specialisierung der D- und Δ-Differentiale die Störungsformeln von Lagrange, Poisson, Hamilton und Jakobi ab. So findet er die Jakobischen Formeln, indem er bei der D-Differentiation die Grössen t, $q_1 \dots q_n$, $p_1 \dots p_n$ alle bis auf eine und ebenso bei der Δ-Differentiation die Variablen t, $\psi_1 \dots \psi_n$, $\varphi_1 \dots \varphi_n$ alle bis auf eine als unveränderlich annimmt. Die Störungsformeln der drei übrigen Mathematiker erhält man hierauf aus der Relation (11) am einfachsten auf folgende Weise. Man betrachtet in dieser Relation die Grössen $q_1 \dots q_n$, $p_1 \dots p_n$ als Funktionen von t, $\psi_1 \dots \psi_n$, $\varphi_1 \dots \varphi_n$ und entwickelt unter dieser Voraussetzung die allgemeinen D- und Δ-Differentiale von $q_1 \dots q_n$, $p_1 \dots p_n$ und E. Alsdann zerfällt die Gleichung (11) in die vervollständigten

Digitized by Google

Lagrangeschen Störungsformeln. Verbindet man diese mit den von Jakobi gegebenen Formeln, so entstehen die Störungsformeln Poissons in ebenfalls vervollständigter Gestalt. Die Störungsformeln Hamiltons endlich findet man, indem man die Variablen $p_1 \dots p_n, \varphi_1 \dots \varphi_n$ als Funktionen von $q_1 \dots q_n$, $\psi_1 \dots \psi_n$ und t auffasst und dann in gleicher Weise wie oben bei der Herleitung der Lagrangeschen Formeln die Gleichung (11) behandelt. Wir unterdrücken hier die Angabe dieser namhaften Störungsformeln, da wir ihnen noch in einer gebräuchlicheren Darstellung der Transformationstheorie des kanonischen Systems (5), zu der wir uns im nächsten Kapitel wenden, und an der Stelle begegnen werden, wo uns der Nachweis beschäftigen soll, dass die Transformationen, mit denen Schering operiert, einer gewissen Klasse von Lieschen Berührungstransformationen angehören, und zwar derjenigen, die uns im kommenden Kapitel entgegentritt.

Viertes Kapitel.

Übliche Transformationstheorie des kanonischen Systems: $\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$.

Es sei vorgelegt das kanonische System

$$(5) \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1 \dots n),$$

wo H wiederum eine beliebige Funktion der unabhängigen Veränderlichen $t, q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n$ ist, und wir stellen uns die Aufgabe, die allgemeinste Transformation

$$(12) \quad \psi_i = \psi_i (t, q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n), \varphi_i = \varphi_i (t, q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n) \quad (i = 1 \dots n)$$

zu bestimmen, die gleichzeitig sämtliche Systeme der Form (5) in den Veränderlichen $t, q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n$ in Systeme derselben Form zwischen den neuen Variablen $t, \psi_1 \dots \psi_n$, $\varphi_1 \dots \varphi_n$ überführt. Suchen wir im Folgenden dieses Problem zu erledigen. Die Funktion H wird bei Anwendung der Transformation (12) in eine andere Funktion übergehen, die wir, um uns an die Scheringschen Bezeichnungen zu halten, durch H — E darstellen können, wo E noch eine unbestimmte,

Digitized by Google

aber im Laufe unserer Behandlung näher zu erschliessende Funktion ist. Die Differentialgleichungen (5) nehmen mithin nach Ausführung der Transformation (12) die neue Gestalt

$$(13)\quad \frac{d\psi_i}{dt} = \frac{\vartheta(H-E)}{\vartheta\varphi_i}, \quad \frac{d\varphi_i}{dt} = -\frac{\vartheta(H-E)}{\vartheta\psi_i} \qquad (i=1\ldots n)$$

an. Hierbei ist $H-E$ als Funktion von $t, \psi_1 \ldots \psi_n, \varphi_1 \ldots \varphi_n$ anzusehen, und auf diese Grössen als unabhängige Veränderliche bezieht sich wie früher die partielle ϑ-Differentiation. Nun ergiebt sich

$$\frac{d\psi_i}{dt} = \frac{\delta\psi_i}{\delta t} + (\psi_i, H) = \frac{\delta\psi_i}{\delta t} + \sum_1^n{}_k \left[\frac{\vartheta H}{\vartheta \psi_k}(\psi_i, \psi_k) + \frac{\vartheta H}{\vartheta \varphi_k}(\psi_i, \varphi_k) \right],$$

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \frac{\delta\varphi_i}{\delta t} + (\varphi_i, H) = \frac{\delta\varphi_i}{\delta t} + \sum_1^n{}_k \left[\frac{\vartheta H}{\vartheta \psi_k}(\varphi_i, \psi_k) + \frac{\vartheta H}{\vartheta \varphi_k}(\varphi_i, \varphi_k) \right]$$

mit der Benutzung der gebräuchlichen Abkürzung

$$(14)\qquad (F, \Phi) = \sum_1^n{}_h \left(\frac{\delta F}{\delta q_h}\frac{\delta \Phi}{\delta p_h} - \frac{\delta F}{\delta p_h}\frac{\delta \Phi}{\delta q_h} \right).$$

Überdies ist nach (13)

$$\frac{d\psi_i}{dt} = \frac{\vartheta(H-E)}{\vartheta\varphi_i}, \quad \frac{d\varphi_i}{dt} = -\frac{\vartheta(H-E)}{\vartheta\psi_i}.$$

Demnach bekommen wir

$$\frac{\vartheta(H-E)}{\vartheta\varphi_i} = \frac{\delta\psi_i}{\delta t} + \sum_1^n{}_k \left[\frac{\vartheta H}{\vartheta \psi_k}(\psi_i, \psi_k) + \frac{\vartheta H}{\vartheta \varphi_k}(\psi_i, \varphi_k) \right],$$

$$-\frac{\vartheta(H-E)}{\vartheta\psi_i} = \frac{\delta\varphi_i}{\delta t} + \sum_1^n{}_k \left[\frac{\vartheta H}{\vartheta \psi_k}(\varphi_i, \psi_k) + \frac{\vartheta H}{\vartheta \varphi_k}(\varphi_i, \varphi_k) \right].$$

Nach unserer Fragestellung müssen aber diese Gleichungen bestehen, welche Gestalt auch die Funktion H haben mag. Daraus ergeben sich die folgenden Bedingungen

$$(15a)\quad (\psi_i, \psi_k) = 0, (\varphi_i, \varphi_k) = 0, (\psi_i, \varphi_k) = 0\ (i \neq k), (\psi_i, \varphi_i) = 1, \qquad (i, k = 1\ldots n)$$

$$(15b)\qquad \frac{\delta\psi_i}{\delta t} = -\frac{\vartheta E}{\vartheta\varphi_i}, \frac{\delta\varphi_i}{\delta t} = \frac{\vartheta E}{\vartheta\psi_i}, \qquad (i = 1\ldots n)$$

Digitized by Google

wo sich die Bedingungsgleichungen (15 b) auch in der Form

$$(15\,c) \qquad (E, \psi_i) = \frac{\partial \psi_i}{\partial t}, \; (E, \varphi_i) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \qquad (i = 1 \ldots n)$$

schreiben lassen. In diesen Gleichungen ist dann E als Funktion von $t, q_1 \ldots q_n, p_1 \ldots p_n$ zu betrachten. In den Gleichungen (15 a) sind nun die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür enthalten, dass die Transformationsgleichungen

$$(12) \quad \psi_i = \psi_i\,(t, q_1 \ldots q_n, p_1 \ldots p_n), \; \varphi_i = \varphi_i\,(t, q_1 \ldots q_n, p_1 \ldots p_n) \qquad (i = 1 \ldots n)$$

eine kanonische Transformation repräsentieren. Denn erfüllen die Funktionen $\psi_1 \ldots \psi_n, \varphi_1 \ldots \varphi_n$ die Relationen (15 a), so ist, damit die Transformation (12) die kanonische Form des Systems (5), wie auch H gestaltet sein mag, bewahrt, nur noch nötig, den Bedingungen (15 b) oder den äquivalenten Bedingungen (15 c) zu genügen. Dies ist in der That immer möglich. Es lässt sich nämlich, wenn die Transformation (12) die Gleichungen (15 a) befriedigt, stets eine Funktion E ermitteln, die mit (15 c) verträglich ist, oder, was diese Funktion noch näher charakterisiert, die Gleichungen (15 c) definieren, wenn für die neuen Veränderlichen $\psi_1 \ldots \psi_n, \varphi_1 \ldots \varphi_n$ die Beziehungen (15 a) gelten, die Funktion E derart, dass die einfache Gestalt der Differentialgleichungen (5) erhalten bleibt bei Ausübung der Transformation (12). Wir werden dies erwiesen haben, wenn wir uns die Gleichungen (15 c) nach den partiellen Derivierten $\frac{\partial E}{\partial q_1} \ldots \frac{\partial E}{\partial q_n}, \frac{\partial E}{\partial p_1} \ldots \frac{\partial E}{\partial p_n}$ aufgelöst denken und zeigen, dass die so erhaltenen Ableitungen den Integrabilitätsbedingungen Genüge leisten. Die Funktion E wird hierauf durch Quadratur gefunden. Um zur Auflösung der Gleichungen (15 c) zu gelangen, verfahren wir folgendermassen. Führen wir in das Symbol (F, Φ) vermöge der Transformation (12) die neuen Veränderlichen $\psi_1 \ldots \psi_n, \varphi_1 \ldots \varphi_n$ ein, so bekommen wir

$$(F, \Phi) = \sum_{i,k}^{1 \ldots n} \Big[\frac{\vartheta F}{\vartheta \psi_i} \frac{\vartheta \Phi}{\vartheta \psi_k} (\psi_i, \psi_k) + \frac{\vartheta F}{\vartheta \psi_i} \frac{\vartheta \Phi}{\vartheta \varphi_k} (\psi_i, \varphi_k) + \frac{\vartheta F}{\vartheta \varphi_i} \frac{\vartheta \Phi}{\vartheta \psi_k} (\varphi_i, \psi_k) + \frac{\vartheta F}{\vartheta \varphi_i} \frac{\vartheta \Phi}{\vartheta \varphi_k} (\varphi_i, \varphi_k) \Big].$$

Digitized by Google

Da die Variablen die Bedingungsgleichungen (15 a) erfüllen, so wird einfach

$$(F,\Phi)=\sum_1^n\left(\frac{\vartheta F}{\vartheta \psi_j}\frac{\vartheta \Phi}{\vartheta \varphi_j}-\frac{\vartheta F}{\vartheta \varphi_j}\frac{\vartheta \Phi}{\vartheta \psi_j}\right).$$

Wir setzen nun zur Abkürzung die rechte Seite dieser Gleichung gleich $(F,\Phi)'$ und erhalten also

(16) $$(F,\Phi)=(F,\Phi)'$$

vermöge (15 a), wie wir natürlich immer voraussetzen. Nun ist einerseits

$$(E,q_k)=-\frac{\delta E}{\delta p_k},\qquad (k=1\ldots n)$$

andererseits aber auch nach (16)

$$(E,q_k)=(E,q_k)'=\sum_1^n\left(\frac{\vartheta E}{\vartheta \psi_j}\frac{\vartheta q_k}{\vartheta \varphi_j}-\frac{\vartheta E}{\vartheta \varphi_j}\frac{\vartheta q_k}{\vartheta \psi_j}\right)\ (k=1\ldots n).$$

Für die Funktionen $\frac{\vartheta E}{\vartheta \psi_j}$ und $\frac{\vartheta E}{\vartheta \varphi_j}$ setzen wir die Werte, die ihnen auf Grund der Gleichungen (15 b) zukommen, aus denen wir eben die partiellen Ableitungen von E bestimmen wollen. Nun ist auch

$$(q_k,\psi_j)=(q_k,\psi_j)';\ (q_k,\varphi_j)=(q_k,\varphi_j)';$$
$$(q_k,\psi_j)=\frac{\delta \psi_j}{\delta p_k},(q_k,\psi_j)'=-\frac{\vartheta q_k}{\vartheta \varphi_j};$$
$$(q_k,\varphi_j)'=\frac{\vartheta q_k}{\vartheta \psi_j},(q_k,\varphi_j)=\frac{\delta \varphi_j}{\delta p_k};$$

demnach hat man die Gleichungen

$$\frac{\vartheta q_k}{\vartheta \varphi_j}=-\frac{\delta \psi_j}{\delta p_k},\frac{\vartheta q_k}{\vartheta \psi_j}=\frac{\delta \varphi_j}{\delta p_k}\qquad (j,k=1\ldots n).$$

Mit Berücksichtigung derselben ergiebt sich

$$(E,q_k)=(E,q_k)'=\sum_1^n\left(-\frac{\delta \varphi_j}{\delta t}\frac{\delta \psi_j}{\delta p_k}+\frac{\delta \psi_j}{\delta t}\frac{\delta \varphi_j}{\delta p_k}\right)\ (k=1\ldots n)$$

und mithin erhalten wir als Auflösung der Gleichungen (15 c) nach $\frac{\delta E}{\delta p_k}$

(17) $$\frac{\delta E}{\delta p_k}=\sum_1^n\left(\frac{\delta \varphi_j}{\delta t}\frac{\delta \psi_j}{\delta p_k}-\frac{\delta \psi_j}{dt}\frac{\delta \varphi_j}{\delta p_k}\right)(k=1\ldots n).$$

Digitized by Google

Auf gleiche Weise bekommt man

$$(18)\qquad \frac{\partial E}{\partial q_k} = \sum_1^n \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial t}\frac{\partial \psi_j}{\partial q_k} - \frac{\partial \psi_j}{\partial t}\frac{\partial \varphi_j}{\partial q_k} \right) \quad (k = 1 \ldots n).$$

Wir wollen das Bestehen der Integrabilitätsbedingungen nicht für alle Fälle hier aufzeigen, sondern zur Verificierung unserer Behauptung nur einen Fall herausgreifen, da die übrigen auf dieselbe Art ihre Erledigung finden. Es ist

$$\frac{\partial^2 E}{\partial p_k \partial q_\iota} = \sum_1^n \left[\frac{\partial \varphi_j}{\partial t}\frac{\partial^2 \psi_j}{\partial p_k \partial q_\iota} - \frac{\partial \psi_j}{\partial t}\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial p_k \partial q_\iota} + \frac{\partial \psi_j}{\partial p_k}\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial t \partial q_\iota} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial p_k}\frac{\partial^2 \psi_j}{\partial t \partial q_\iota} \right]$$

$$= \sum_1^n \left[\frac{\partial \varphi_j}{\partial t}\frac{\partial^2 \psi_j}{\partial p_k \partial q_\iota} - \frac{\partial \psi_j}{\partial t}\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial p_k \partial q_\iota} \right]$$

$$+ \sum_1^n \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \psi_j}{d p_k}\frac{\partial \varphi_j}{\partial q_\iota} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial p_k}\frac{\partial \psi_j}{\partial q_\iota} \right] - \sum_1^n \left[\frac{\partial^2 \psi_j}{\partial p_k \partial t}\frac{\partial \varphi_j}{\partial q_\iota} - \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial p_k \partial t}\frac{\partial \psi_j}{\partial q_\iota} \right].$$

Nun haben wir oben erhalten

$$\frac{\vartheta q_k}{\vartheta \varphi_j} = -\frac{\partial \psi_j}{\partial p_k}, \quad \frac{\vartheta q_k}{\vartheta \psi_j} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial p_k}.$$

Ebenso erkennt man auch durch Betrachtungen, welche denjenigen verwandt sind, die uns zu den vorstehenden Gleichungen hingeleitet haben, die Richtigkeit der folgenden Beziehungen

$$\frac{\vartheta p_\iota}{\vartheta \varphi_j} = \frac{\partial \psi_j}{\partial q_\iota}, \quad \frac{\vartheta p_\iota}{\vartheta \psi_j} = -\frac{\partial \varphi_j}{\partial q_\iota}.$$

Wir können demnach schreiben

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_1^n \left[\frac{\partial \psi_j}{\partial p_k}\frac{\partial \varphi_j}{\partial q_\iota} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial p_k}\frac{\partial \psi_j}{\partial q_\iota} \right] = \frac{\partial}{\partial t}\sum_1^n \left[\frac{\vartheta p_\iota}{\vartheta \psi_j}\frac{\vartheta q_k}{\vartheta \varphi_j} - \frac{\vartheta p_\iota}{\vartheta \varphi_j}\frac{\vartheta q_k}{\vartheta \psi_j} \right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}(p_\iota, q_k)' = \frac{\partial}{\partial t}(p_\iota, q_k) = 0.$$

Mithin ist

$$\frac{\partial^2 E}{\partial p_k \partial q_\iota} = \sum_1^n \left[\frac{\partial \varphi_j}{\partial t}\frac{\partial^2 \psi_j}{\partial p_k \partial q_\iota} - \frac{\partial \psi_j}{\partial t}\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial p_k \partial q_\iota} \right]$$

$$- \sum_1^n \left[\frac{\partial^2 \psi_j}{\partial p_k \partial t}\frac{\partial \varphi_j}{\partial q_\iota} - \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial p_k \partial t}\frac{\partial \psi_j}{\partial q_\iota} \right].$$

Digitized by Google

Aus (18) folgt aber auch

$$\frac{\partial^2 E}{\partial q_\iota \partial p_k} = \sum_1^n{}_j \left[\frac{\partial \varphi_j}{\partial t} \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial q_\iota \partial p_k} - \frac{\partial \psi_j}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial q_\iota \partial p_k} \right]$$

$$- \sum_1^n{}_j \left[\frac{\partial^2 \psi_j}{\partial t \partial p_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_\iota} - \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial t \partial p_k} \frac{\partial \psi_j}{\partial q_\iota} \right].$$

Da die rechten Seiten dieser beiden Gleichungen einander gleich sind, folgt die Gültigkeit der Integrabilitätsbedingungen. Die Funktion E kann daher durch Quadratur gefunden werden, und zwar ist sie dann bis auf eine additiv hinzutretende willkürliche Funktion der Zeit t bestimmt, was auch schon deshalb einleuchtet, weil zu der Funktion H des Systems (5) eine beliebige Funktion von t hinzuaddiert werden kann, ohne dass das System (5) eine wesentliche Veränderung erfährt. Wir haben somit den Nachweis geführt,

„dass die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Transformation

$$(12)\ \psi_i = \psi_i (t, q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n), \varphi_i = \varphi_i (t, q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n) \quad (i = 1 \dots n)$$

die Form des kanonischen Systems

$$(5) \qquad \frac{d q_i}{d t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \frac{d p_i}{d t} = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1 \dots n)$$

bewahrt, wie auch H beschaffen sein mag, ausgedrückt werden durch die Relationen

$$\text{I.}\quad (\psi_i, \psi_k) = 0, (\varphi_i, \varphi_k) = 0, (\psi_i, \varphi_k) = 0_{(i \neq k)}, (\psi_i, \varphi_i) = 1. \quad (i, k = 1 \dots n)$$

Nach Ausführung dieser Transformation (12) auf (5), geht (5) über in

$$(13) \qquad \frac{d \psi_i}{d t} = \frac{\vartheta (H - E)}{\vartheta \varphi_i}, \frac{d \varphi_i}{d t} = - \frac{\vartheta (H - E)}{\vartheta \psi_i} \quad (i = 1 \dots n)$$

und E befriedigt als Funktion von $t, \psi_1 \dots \psi_n, \varphi_1 \dots \varphi_n$ die Gleichungen

$$(15\,b) \qquad \frac{\partial \psi_i}{d t} = - \frac{\vartheta E}{\vartheta \varphi_i}, \frac{\partial \varphi_i}{d t} = \frac{\vartheta E}{\vartheta \psi_i}, \quad (i = 1 \dots n)$$

dagegen als Funktion von $t, q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n$ die folgenden Gleichungen

Digitized by Google

(15c) $$\frac{\delta \psi_i}{\delta t} = (E, \psi_i), \quad \frac{\delta \varphi_i}{\delta t} = (E, \varphi_i) \qquad (i = 1 \ldots n)$$

und ist bis auf eine willkürliche additiv hinzutretende Funktion von t durch eine Quadratur bestimmt."

Nach der von Lie aufgestellten und begründeten Theorie der Berührungstransformationen*) ist es nun immer möglich, sobald die Funktionen $\psi_1 \ldots \psi_u$, $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ die Gleichungen I befriedigen, durch Quadratur eine solche Funktion Ω von $t, q_1 \ldots q_n, p_1 \ldots p_n$ zu finden, dass die Gleichungen

$$z' = z + \Omega(t, q_1 \ldots q_n, p_1 \ldots p_n), \quad \psi_i = \psi_i(t, q_1 \ldots q_n, p_1 \ldots p_n),$$
$$\varphi_i = \varphi_i(t, q_1 \ldots q_n, p_1 \ldots p_n)$$

eine Berührungstransformation in den Veränderlichen $q_1 \ldots q_n, p_1 \ldots p_n$ darstellen. Wir bezeichnen daher auch die verkürzte Transformation

(12) $$\psi_i = \psi_i(t, q_1 \ldots q_n, p_1 \ldots p_n), \varphi_i = \varphi_i(t, q_1 \ldots q_n, p_1 \ldots p_n) \qquad (i = 1 \ldots n)$$

als Berührungstransformation in den Veränderlichen $q_1 \ldots q_n, p_1 \ldots p_n$, die überdies noch von der Zeit t abhängt.

In den Gleichungen I, (15b) oder (15c) sind die Störungsformeln enthalten, die Poisson**) zuerst und zwar in speciellerem Sinne aufgestellt hat.

Wir wenden uns jetzt dazu, die Bedingungen I in einer anderen, aber mit der ursprünglichen gleichwertigen Form darzustellen. Wir nehmen dabei zunächst die Gleichung (16) zu Hülfe. Diese lautete:

(16) $$(F, \Phi) = (F, \Phi)',$$

wo die Funktionen F und Φ einerseits als Funktionen von $t, q_1 \ldots q_n, p_1 \ldots p_n$, andererseits vermöge der Berührungstransformation (12) als Funktionen von $t, \psi_1 \ldots \psi_n, \varphi_1 \ldots \varphi_n$ anzusehen sind. Es gelten sodann die folgenden Systeme von Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} (q_i, \varphi_k) &= (q_i, \varphi_k)', \ (q_i, \psi_k) = (q_i, \psi_k)'; \\ (p_i, \varphi_k) &= (p_i, \varphi_k)', \ (p_i, \psi_k) = (p_i, \psi_k)'. \end{aligned}\right\} (i, k = 1 \ldots n).$$

*) Sophus Lie, „Zur analytischen Theorie der Berührungstransformationen", Juni 1873.

**) Poisson: „Sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de Mécanique." Journal de l'École Polyt., cahier XV. t. VIII. Paris 1809.

Digitized by Google

Diese ziehen ohne weiteres die Relationen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\vartheta q_i}{\vartheta \psi_k} &= \frac{\delta \varphi_k}{\delta p_i}, \frac{\vartheta q_i}{\vartheta \varphi_k} = -\frac{\delta \psi_k}{\delta p_i}; \\ \frac{\vartheta p_i}{\vartheta \psi_k} &= -\frac{\delta \varphi_k}{\delta q_i}, \frac{\vartheta p_i}{\vartheta \varphi_k} = \frac{\delta \psi_k}{\delta q_i}, \end{aligned}\right\} (i, k = 1 \dots n)$$

nach sich, wenn man sich der Definition des Klammersymbols (F, Φ) erinnert. Ferner ist für eine beliebige Funktion f

$$\frac{\delta f}{\delta t} = \frac{\vartheta f}{\vartheta t} + \sum_1^n{}_i \left[\frac{\vartheta f}{\vartheta \psi_i}\frac{\delta \psi_i}{\delta t} + \frac{\vartheta f}{\vartheta \varphi_i}\frac{\delta \varphi_i}{\delta t}\right].$$

Da aber nach (15b)

$$\frac{\delta \psi_i}{\delta t} = -\frac{\vartheta E}{\vartheta \varphi_i}, \frac{\delta \varphi_i}{\delta t} = \frac{\vartheta E}{\vartheta \psi_i}$$

ist, so geht die vorausstehende Gleichung über in die folgende

$$(19)\quad \frac{\delta f}{\delta t} = \frac{\vartheta f}{\vartheta t} + \sum_1^n{}_i \left[\frac{\vartheta E}{\vartheta \psi_i}\frac{\vartheta f}{\vartheta \varphi_i} - \frac{\vartheta E}{\vartheta \varphi_i}\frac{\vartheta f}{\vartheta \psi_i}\right] = \frac{\vartheta f}{\vartheta t} + (E, f)'.$$

Setzen wir nun an Stelle von f der Reihe nach $q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n$ und E, so ergeben sich die Relationen

$$\frac{\vartheta q_i}{\vartheta t} = -(E, q_i)', \frac{\vartheta p_i}{\vartheta t} = -(E, p_i)',$$

$$\frac{\vartheta E}{\vartheta t} = \frac{\delta E}{\delta t}, \quad (i = 1 \dots n)$$

oder mit Berücksichtigung von (16) die Gleichungen

$$\frac{\vartheta q_i}{\vartheta t} = -(E, q_i), \frac{\vartheta p_i}{\vartheta t} = -(E, p_i),$$

$$\frac{\vartheta E}{\vartheta t} = \frac{\delta E}{\delta t}. \quad (i = 1 \dots n)$$

Da nun endlich

$$(E, q_i) = -\frac{\delta E}{\delta p_i}, (E, p_i) = \frac{\delta E}{\delta q_i} \quad (i = 1 \dots n)$$

ist, so resultieren die Beziehungen

$$\frac{\vartheta q_i}{\vartheta t} = \frac{\delta E}{\delta p_i}, \frac{\vartheta p_i}{\vartheta t} = -\frac{\delta E}{\delta q_i},$$

$$\frac{\vartheta E}{\vartheta t} = \frac{\delta E}{\delta t}. \quad (i = 1 \dots n)$$

Digitized by Google

Fassen wir nun alle gefundenen Relationen zusammen, so haben wir die neue Form

$$\text{II.}\quad \begin{cases} \frac{\vartheta q_i}{\vartheta \psi_k} = \frac{\delta \varphi_k}{\delta p_i}, \frac{\vartheta q_i}{\vartheta \varphi_k} = -\frac{\delta \psi_k}{\delta p_i}, \frac{\vartheta q_i}{\vartheta t} = \frac{\delta E}{\delta p_i}, \\ \frac{\vartheta p_i}{\vartheta \psi_k} = -\frac{\delta \varphi_k}{\delta q_i}, \frac{\vartheta p_i}{\vartheta \varphi_k} = \frac{\delta \psi_k}{\delta q_i}, \frac{\vartheta p_i}{\vartheta t} = -\frac{\delta E}{\delta q_i}, \\ \frac{\vartheta E}{\vartheta \psi_k} = \frac{\delta \varphi_k}{\delta t}, \frac{\vartheta E}{\vartheta \varphi_k} = -\frac{\delta \psi_k}{\delta t}, \frac{\vartheta E}{\vartheta t} = \frac{\delta E}{\delta t} \end{cases}_{(i,\, k = 1 \ldots n)}$$

der kanonischen Bedingungen. Diese Gleichungen II enthalten die von Jakobi aufgestellten Störungsformeln. Wir können diese Bedingungen wiederum kanonische nennen, da, wenn die Bedingungen II erfüllt sind, auch den kanonischen Relationen I Genüge geschieht. Dies lässt sich leicht bestätigen. Es ist nämlich

$$\sum_1^n{}_h \left[\frac{\delta \psi_i}{\delta q_h} \frac{\vartheta q_h}{\vartheta \psi_k} + \frac{\delta \psi_i}{\delta p_h} \frac{\vartheta p_h}{\vartheta \psi_k} \right] = \begin{cases} 0 & (i \neq k), \\ 1 & (i = k). \end{cases}$$

Führt man nun hierin die durch die Relationen II gegebenen Werte von $\frac{\vartheta q_h}{\vartheta \psi_k}, \frac{\vartheta p_h}{\vartheta \psi_k}$ ein, so wird

$$(\psi_i, \varphi_k) = 0 \ (i \neq k), \ (\psi_i, \varphi_i) = 1,$$

und ebenso erhält man die übrigen Bedingungsgleichungen I, was zu erweisen war. Bevor wir auch die im vorigen Kapitel angekündigte Ableitung der übrigen Störungsformeln von Lagrange und Hamilton geben, wollen wir über die Integration der Hamiltonschen Differentialgleichungen das Wesentliche entwickeln, das sich unmittelbar an die Transformationstheorie derselben anschliesst. Es wird uns da die wichtige Beziehung entgegentreten, welche zwischen einer gewissen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, die das mechanische Problem beherrscht, und den dynamischen Differentialgleichungen (5) besteht. Dieser Zusammenhang ist von Hamilton und Jakobi erkannt worden.

Wir nehmen an, dass die Gleichungen (12)

$$(20)\quad \psi_i = \psi_i (t, q_1 \ldots q_n, p_1 \ldots p_n), \varphi_i = \varphi_i (t, q_1 \ldots q_n, p_1 \ldots p_n),_{(i = 1 \ldots n)}$$

die eine Berührungstransformation in den Veränderlichen $q_1 \ldots q_n, p_1 \ldots p_n$ darstellen, nach den Veränderlichen

Digitized by Google

$p_1 \dots p_n$. $\psi_1 \dots \psi_n$ auflösbar sind. Dass dies, wenn es noch nicht der Fall sein sollte, stets zu erreichen möglich ist, werden wir im zweiten Teile dieser Arbeit berühren. Bleiben wir indessen jetzt bei der eben gemachten Voraussetzung.

Bilden wir dann den Ausdruck

$$-E\,dt+\sum_1^n{}^i p_i\,dq_i+\sum_1^n{}^i \psi_i\,d\varphi_i,$$

so behaupten wir, dass derselbe ein totales Differential dW ist. Den Beweis dieser Behauptung geben wir in folgender Weise. Diese Eigenschaft des vorgestellten Ausdrucks wird natürlich nicht geändert, wenn wir statt der Grössen $q_1 \dots q_n$, $\varphi_1 \dots \varphi_n$ ein anderes System unabhängiger Veränderlicher, etwa das System $q_1 \dots q_n$, $p_1 \dots p_n$ einführen. Es würde dann werden

$$-E\,dt+\sum_1^n{}^i p_i\,dq_i+\sum_1^n{}^i \psi_i\,d\varphi_i=-\mathfrak{E}\,dt+\sum_1^n{}^i \mathfrak{Q}_i\,dq_i+\sum_1^n{}^i \mathfrak{P}_i\,dp_i,$$

wo $\mathfrak{E}, \mathfrak{Q}_1 \dots \mathfrak{Q}_n$, $\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_n$ die folgende Gestalt haben:

$$-\mathfrak{E}=-E+\sum_1^n{}^i \psi_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial t},\quad \mathfrak{Q}_k=p_k+\sum_1^n{}^i \psi_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_k},$$

$$\mathfrak{P}_k=\sum_1^n{}^i \psi_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_k}.$$

Soll nun unser Ausdruck ein vollständiges Differential sein, so müssen die Bedingungen

$$\frac{\partial(-\mathfrak{E})}{\partial q_k}-\frac{\partial\mathfrak{Q}_k}{\partial t}\equiv-\frac{\partial E}{\partial q_k}+\sum_1^n{}^i\left[\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}\frac{\partial\psi_i}{\partial q_k}-\frac{\partial\psi_i}{\partial t}\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_k}\right]=0,$$

$$\frac{\partial(-\mathfrak{E})}{\partial p_k}-\frac{\partial\mathfrak{P}_k}{\partial t}\equiv-\frac{\partial E}{\partial p_k}+\sum_1^n{}^i\left[\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}\frac{\partial\psi_i}{\partial p_k}-\frac{\partial\psi_i}{\partial t}\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_k}\right]=0,$$

$$\frac{\partial\mathfrak{Q}_i}{\partial q_k}-\frac{\partial\mathfrak{Q}_k}{\partial q_i}\equiv\sum_1^n{}^j\left[\frac{\partial\psi_j}{\partial q_k}\frac{\partial\varphi_j}{\partial q_i}-\frac{\partial\varphi_j}{\partial q_k}\frac{\partial\psi_j}{\partial q_i}\right]=0,$$

$$\frac{\partial\mathfrak{Q}_i}{\partial p_k}-\frac{\partial\mathfrak{P}_k}{\partial q_i}\equiv e_{ik}+\sum_1^n{}^j\left[\frac{\partial\psi_j}{\partial p_k}\frac{\partial\varphi_j}{\partial q_i}-\frac{\partial\varphi_j}{\partial p_k}\frac{\partial\psi_j}{\partial q_i}\right]=0,$$

$$\frac{\partial\mathfrak{P}_i}{\partial p_k}-\frac{\partial\mathfrak{P}_k}{\partial p_i}\equiv\sum_1^n{}^j\left[\frac{\partial\psi_j}{\partial p_k}\frac{\partial\varphi_j}{\partial p_i}-\frac{\partial\varphi_j}{\partial p_k}\frac{\partial\psi_j}{\partial p_i}\right]=0$$

$(i, k = 1 \dots n)$

Digitized by Google

stattfinden, wo

$$e_{ik} = 0 \ (i \neq k), \ e_{ii} = 1$$

ist. Mit Berücksichtigung der Gleichungen II erkennt man sofort, dass obige Bedingungen in der That erfüllt sind, und es ist hierdurch gezeigt, dass unser Differentialausdruck ein totales Differential ist. Wir dürfen daher schreiben

$$(21) \qquad dW = -E\,dt + \sum_1^n p_i\,dq_i + \sum_1^n \psi_i\,d\varphi_i .$$

Bezeichnen wir die partielle Differentiation nach den unabhängigen Variabeln $q_1 \dots q_n$, $\varphi_1 \dots \varphi_n$, t mit $\mathfrak{d}$, so können wir nach (21) zunächst die folgenden Störungsformeln

$$(22) \qquad \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{d}p_i}{\mathfrak{d}q_k} = \dfrac{\mathfrak{d}p_k}{\mathfrak{d}q_i}, \ \dfrac{\mathfrak{d}p_i}{\mathfrak{d}\varphi_k} = \dfrac{\mathfrak{d}\psi_k}{\mathfrak{d}q_i}, \ \dfrac{\mathfrak{d}\psi_i}{\mathfrak{d}\varphi_k} = \dfrac{\mathfrak{d}\psi_k}{\mathfrak{d}\varphi_i}, \\ \dfrac{\mathfrak{d}p_i}{\mathfrak{d}t} = -\dfrac{\mathfrak{d}E}{\mathfrak{d}q_i}, \ \dfrac{\mathfrak{d}\psi_k}{\mathfrak{d}t} = -\dfrac{\mathfrak{d}E}{\mathfrak{d}\varphi_k} \end{cases} \qquad (i, k = 1 \dots n)$$

aufstellen. Dieselben haben naturgemäss grosse Ähnlichkeit mit den Hamiltonschen Störungsformeln, die wir noch in diesem Kapitel kennen lernen werden. Ebenso können wir aus (21) schliessen

$$(23) \qquad \frac{\mathfrak{d}W}{\mathfrak{d}t} = -E,$$

$$(24) \qquad \frac{\mathfrak{d}W}{\mathfrak{d}q_i} = p_i \ , \ \frac{\mathfrak{d}W}{\mathfrak{d}\varphi_i} = \psi_i \ . \qquad (i = 1 \dots n)$$

Es ist einleuchtend, dass die Gleichungen (24) die Auflösung der Gleichungen (20) nach den Veränderlichen $p_1 \dots p_n$, $\psi_1 \dots \psi_n$ repräsentieren. Umgekehrt gilt auch der leicht zu erweisende Satz, dass, wenn eine Funktion W von $t, q_1 \dots q_n$, $\varphi_1 \dots \varphi_n$ vorliegt, die Gleichungen (24) eine kanonische Transformation und die aus ihnen durch Auflösung nach $\psi_1 \dots \psi_n, \varphi_1 \dots \varphi_n$ erhaltenen Gleichungen eine Berührungstransformation darstellen. Es ist dabei nur erforderlich, dass die Funktionaldeterminante

$$\left| \frac{\mathfrak{d}^2 W}{\mathfrak{d}q_i \, \mathfrak{d}\varphi_k} \right|$$

nicht identisch verschwindet.

Digitized by Google

Wir betrachten jetzt die mit der Transformation (24) gleichwertige Transformation

$$(20)\quad \psi_i = \psi_i(t, q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n), \varphi_i = \varphi_i(t, q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n) \quad (i = 1 \dots n)$$

und führen sie auf die dynamischen Differentialgleichungen

$$(5)\quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1 \dots n)$$

aus. Diese gehen dann über in die nachstehenden

$$(13)\quad \frac{d\psi_i}{dt} = \frac{\vartheta(H-E)}{\vartheta\varphi_i}, \frac{d\varphi_i}{dt} = -\frac{\vartheta(H-E)}{\vartheta\varphi_i}. \quad (i = 1 \dots n)$$

Machen wir nun die Annahme, dass die Berührungstransformation (20) so beschaffen ist, dass die Funktion $H - E$ frei von $\psi_1 \dots \psi_n, \varphi_1 \dots \varphi_n$ wird, so werden $\psi_1 \dots \psi_n$, $\varphi_1 \dots \varphi_n$ zu Konstanten, und die Integration des Systems (5) ist geleistet. Da $H - E$ also von $\psi_1 \dots \psi_n, \varphi_1 \dots \varphi_n$ unabhängig ist, dürfen wir setzen

$$H - E = f(t),$$

oder ausführlicher geschrieben vermöge (20)

$$H(t, q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n) - E = f(t).$$

Nehmen wir noch die Gleichungen (23) und (24) zu Hülfe, so erhalten wir die folgende partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$H\left(t, q_1 \dots q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1} \dots \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) + \frac{\partial W}{\partial t} = f(t).$$

Da aber die Differentialgleichungen des mechanischen Problems keine Änderung erleiden, wenn man zu H eine beliebige Funktion der Zeit t additiv hinzufügt, so kann die partielle Differentialgleichung erster Ordnung kürzer in der Form

$$(25)\quad H\left(t, q_1 \dots q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1} \dots \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) + \frac{\partial W}{\partial t} = 0$$

geschrieben werden. Die Funktion $W \equiv W(t, q_1 \dots q_n, \varphi_1 \dots \varphi_n)$ ist mithin eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung (25). Rückwärts lässt sich auch ohne Schwierigkeit zeigen, dass die Integration des Systems (5) durch die Gleichungen (24) gegeben ist, sobald man eine vollständige Lösung der Gleichung (25) kennt. Wir haben sonach den

Digitized by Google

folgenden Satz gewonnen: „Kennt man eine vollständige Lösung $W(t, q_1 \dots q_n, \varphi_1 \dots \varphi_n)$ mit den n willkürlichen Konstanten $\varphi_1 \dots \varphi_n$ der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{\partial f}{\partial t} + H\left(t, q_1 \dots q_n, \frac{\partial f}{\partial q_1} \dots \frac{\partial f}{\partial q_n}\right) = 0,$$

so sind die Integralgleichungen des Systems von Differentialgleichungen

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1 \dots n)$$

gegeben durch die Gleichungen

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial W}{\partial \varphi_i} = \psi_i, \qquad (i = 1 \dots n)$$

wo $\psi_1 \dots \psi_n$ weitere willkürliche Konstanten bedeuten."

Mit diesem Satze haben wir den Zusammenhang ausgesprochen, der zwischen der Integration der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (25) und der Integration eines simultanen Systems (5) besteht.*)

Ist nun

$$u = u(t, q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n)$$

ein Integral der Bewegungsgleichungen (5), so muss

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_1^n \left[\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt}\right]$$

nach (5)

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{5}$$

verschwinden, also

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u, H) = 0 \tag{26}$$

sein. Ist v ein zweites Integral von (5), so ist auch

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v, H) = 0.$$

Nun besteht die Jakobische Identität

$$\big((v, H), u\big) + \big((H, u), v\big) + \big((u, v), H\big) \equiv 0.$$

*) Jakobi, Vorlesungen über Dynamik, herausgegeben von A. Clebsch Zwanzigste Vorlesung S. 157 ff.

Digitized by Google

Da u und v nach Voraussetzung Integrale des Systems (5) sind, so folgt aus vorstehender Identität

$$\left(u, \frac{\delta v}{\delta t}\right) + \left(\frac{\delta u}{\delta t}, v\right) + \left((u, v), H\right) \equiv 0$$

vermöge (5) oder

$$\frac{\delta}{\delta t}(u, v) + \left((u, v), H\right) = 0, \tag{27}$$

d. h. (u, v) ist auch ein Integral der dynamischen Differentialgleichungen. Ist (u, v) keine blosse Funktion von u und v, so kann man durch Klammeroperationen neue Integrale finden und man gelangt auf diese Weise zu einer geschlossenen Reihe von Integralen u, v, w..., die so beschaffen sind, dass sich aus ihnen durch die obige Klammeroperation keine neuen Integrale ableiten lassen. Die Entdeckung des in der Gleichung (27) enthaltenen Satzes verdanken wir Jakobi, obwohl er schon in den Untersuchungen Poissons implicite auftritt. Das innere Wesen dieses Satzes aber, den Jakobi in seiner Dynamik, weil man auf Grund desselben aus zwei Integralen im allgemeinen durch blosses Differentiieren eine Anzahl neuer ableiten kann, als einen der „merkwürdigsten Sätze der ganzen Integralrechnung" bezeichnet, wurde erst erschlossen durch die von Lie*) aufgestellte Theorie der Funktionengruppen.

Ist u ein Integral der Bewegungsgleichungen (5), so war nach (26)

$$\frac{\delta u}{\delta t} + (u, H) \equiv 0.$$

Differentiieren wir diese Identität partiell nach t, so ergiebt sich

$$\frac{\delta^2 u}{\delta t^2} + \left(\frac{\delta u}{\delta t}, H\right) + \left(u, \frac{\delta H}{\delta t}\right) = 0.$$

Gilt nun für das mechanische Problem (5) das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft, so enthält H die Veränderliche t nicht explicite. Wir erhalten also

$$\frac{\delta^2 u}{\delta t^2} + \left(\frac{\delta u}{\delta t}, H\right) = 0.$$

*) Lie, Über partielle Differentialgleichungen 1. O. Christiania, 21. März 1873.

Digitized by Google

Es gilt demnach der Satz: „Ist die Funktion H frei von t und u ein die Zeit t enthaltendes Integral des Systems

$$(5) \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\delta H}{\delta p_i}, \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\delta H}{\delta q_i}, \qquad (i = 1 \ldots n)$$

so ist auch

$$\frac{\delta u}{\delta t},$$

die partielle Ableitung von u nach t ein Integral der dynamischen Differentialgleichungen (5)". Schering beweist diesen Satz, wenn auch auf andere Weise wie hier geschehen, im Artikel VI seiner zweiten Abhandlung und führt daselbst einen Fall an, bei dem ein gewisses Integral C der Bewegungsgleichungen mit seinen $(2n-1)$ partiellen Derivierten nach t ein vollständiges System von Integralen der Differentialgleichungen (5) des mechanischen Problems darstellt, wenn H, wie natürlich vorausgesetzt werden muss, nicht unmittelbar von t abhängt. An ebenderselben Stelle giebt Schering ein Beispiel, wie aus zwei gewissen Integralen A und B durch Klammeroperation alle übrigen $(2n-2)$ unabhängigen Integrale der Hamiltonschen Gleichungen (5) gefunden werden.

Kehren wir jetzt zu dem Punkte zurück, den wir auf Seite 24 verlassen haben. Wir versprachen dort auch die Ableitung der übrigen bekannten Störungsformeln, derjenigen von Lagrange und Hamilton zu geben. Verbinden wir nämlich die durch I und (15 c) charakterisierten Poissonschen Störungsformeln mit den daraus folgenden Jakobischen Formeln II, so ergeben sich sofort die Störungsformeln von Lagrange:

III.

$$\begin{cases} \sum_1^n{}_i \left[\frac{\vartheta q_i}{\vartheta \psi_h}\frac{\vartheta p_i}{\vartheta \psi_k} - \frac{\vartheta p_i}{\vartheta \psi_h}\frac{\vartheta q_i}{\vartheta \psi_k}\right] = 0, \\ \sum_1^n{}_i \left[\frac{\vartheta q_i}{\vartheta \psi_h}\frac{\vartheta p_i}{\vartheta \varphi_k} - \frac{\vartheta p_i}{\vartheta \psi_h}\frac{\vartheta q_i}{\vartheta \varphi_k}\right] = 0 \text{ für } h \neq k, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 1 \text{ für } h = k, \\ \sum_1^n{}_i \left[\frac{\vartheta q_i}{\vartheta \varphi_h}\frac{\vartheta p_i}{\vartheta \varphi_k} - \frac{\vartheta p_i}{\vartheta \varphi_h}\frac{\vartheta q_i}{\vartheta \varphi_k}\right] = 0, \\ \sum_1^n{}_i \left[\frac{\vartheta q_i}{\vartheta t}\frac{\vartheta p_i}{\vartheta \psi_h} - \frac{\vartheta p_i}{\vartheta t}\frac{\vartheta q_i}{\vartheta \psi_h}\right] = \frac{\vartheta E}{\vartheta \psi_h}, \\ \sum_1^n{}_i \left[\frac{\vartheta q_i}{\vartheta t}\frac{\vartheta p_i}{\vartheta \varphi_k} - \frac{\vartheta p_i}{\vartheta t}\frac{\vartheta q_i}{\vartheta \varphi_k}\right] = \frac{\vartheta E}{\vartheta \varphi_k}. \end{cases}$$

Digitized by Google

Um endlich die Hamiltonschen Störungsformeln zu erhalten, verfahren wir folgendermassen. Wir setzen voraus, dass es möglich sei, die Grössen $p_1 \dots p_n, \varphi_1 \dots \varphi_n$ als Funktionen von $t, q_1 \dots q_n, \psi_1 \dots \psi_n$ darzustellen. Es ist dann leicht zu beweisen, dass

$$(28) \qquad dS \equiv -E\,dt + \sum_1^n{}^i p_i\,dq_i - \sum_1^n{}^i \varphi_i\,d\psi_i$$

ein totales Differential ist. Denn man braucht nur zu der Identität

$$(21) \qquad dW \equiv -E\,dt + \sum_1^n{}^i p_i\,dq_i + \sum_1^n{}^i \psi_i\,d\varphi_i$$

die Identität

$$-d\sum_1^n{}^i \psi_i \varphi_i = -\sum_1^n{}^i \psi_i\,d\varphi_i - \sum_1^n{}^i \varphi_i\,d\psi_i$$

hinzuzuaddieren, um zu (28) zu gelangen. Aus (28) folgt dann

$$(29) \qquad \begin{cases} \dfrac{\delta S}{\delta t} = -E, \\ \dfrac{\delta S}{\delta q_i} = p_i, \quad -\dfrac{\delta S}{\delta \psi_i} = \varphi_i, \\ (i = 1 \dots n) \end{cases}$$

wenn wir die partielle Differentiation nach den unabhängigen Veränderlichen $t, q_1 \dots q_n, \psi_1 \dots \psi_n$ mit δ bezeichnen, oder auch

$$\text{IV.} \qquad \begin{cases} \dfrac{\delta p_i}{\delta q_k} = \dfrac{\delta p_k}{\delta q_i}, \dfrac{\delta p_i}{\delta \psi_k} = -\dfrac{\delta \varphi_k}{\delta q_i}, \dfrac{\delta \varphi_i}{\delta \psi_k} = \dfrac{\delta \varphi_k}{\delta \psi_i}, \\ \dfrac{\delta p_i}{\delta t} = -\dfrac{\delta E}{\delta q_i}, \dfrac{\delta \varphi_k}{\delta t} = \dfrac{\delta E}{\delta \psi_k}. \\ (i, k = 1 \dots n) \end{cases}$$

Dies sind die Gleichungen, die Hamilton unter specielleren Annahmen aufgestellt hat. Wir deuten schliesslich in diesem Kapitel in aller Kürze noch an, wie man die Entwicklungen dieses Kapitels zur Behandlung des Störungsproblems verwenden kann. Ist ein mechanisches Problem durch die Gleichungen

$$(5) \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1 \dots n)$$

Digitized by Google

vorgelegt, wo H die Hamiltonsche Funktion mit Einschluss der störenden Kräfte bezeichnet, und kennt man für das ungestörte Problem

$$\frac{\vartheta q_i}{\vartheta t} = \frac{\delta E}{\delta p_i}, \frac{\vartheta p_i}{\vartheta t} = -\frac{\delta E}{\delta q_i} \tag{30}$$

die kanonischen Integrale $\psi_1 \dots \psi_n, \varphi_1 \dots \varphi_n$, so dass die Gleichungen

$$\psi_i = \psi_i (t, q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n), \varphi_i = \varphi_i (t, q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n)$$

eine Berührungstransformation definieren, so ist, wenn

$$f(t, q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n) = a$$

irgend eines dieser Integrale bedeutet, für das gestörte Problem (5) a nicht mehr konstant und also $\frac{da}{dt}$ nicht mehr gleich Null. Man erhält vielmehr

$$\frac{da}{dt} = \frac{\delta f}{\delta t} + (f, H) = \frac{\delta f}{\delta t} + (f, E) + (f, H - E).$$

Da aber f ein Integral von (30) sein soll, wird

$$\frac{\delta f}{\delta t} + (f, E) = 0.$$

Demnach bekommt man

$$\frac{da}{dt} = (f, H - E).$$

Überdies ist nach (16)

$$(F, \Phi) = (F, \Phi)', \tag{16}$$

also auch

$$\frac{da}{dt} = (f, H - E)' = \sum_1^n{}_j \left[\frac{\vartheta f}{\vartheta \psi_j} \frac{\vartheta (H - E)}{\vartheta \varphi_j} - \frac{\vartheta (H - E)}{\vartheta \psi_j} \frac{\vartheta f}{\vartheta \varphi_j} \right].$$

Setzen wir nun für f der Reihe nach $\psi_1 \dots \psi_n, \varphi_1 \dots \varphi_n$, so ergeben sich die Gleichungen

$$\frac{d\psi_k}{dt} = \frac{\vartheta (H - E)}{\vartheta \varphi_k}, \frac{d\varphi_k}{dt} = -\frac{\vartheta (H - E)}{\vartheta \psi_k} \quad (k = 1 \dots n) \tag{31}$$

als die Differentialgleichungen des Störungsproblems, wo $H - E$ als Funktion von $t, \psi_1 \dots \psi_n, \varphi_1 \dots \varphi_n$ dargestellt gedacht ist. Nach dem auf Seite 28 aufgestellten Satze ist die Integration des Systems (31) gleichbedeutend mit der

Digitized by Google

Auffindung einer vollständigen Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\mathfrak{d}'f}{\mathfrak{d}'t} + H - E = 0,$$

wenn die Grössen $\varphi_1 \dots \varphi_n$ durch $\frac{\mathfrak{d}'f}{\mathfrak{d}'\psi_1} \cdots \frac{\mathfrak{d}'f}{\mathfrak{d}'\psi_n}$ ersetzt worden sind und überdies $\mathfrak{d}'$ die partielle Differentiation nach den Variabeln $\psi_1 \dots \psi_n$ und den in der vollständigen Lösung auftretenden n willkürlichen Konstanten bedeutet.

Fünftes Kapitel.

Beweis, dass die Scheringschen Transformationen Berührungstransformationen sind.

Wir haben bereits aus den Entwicklungen Scherings, die wir im dritten Kapitel dieser Arbeit gegeben haben, mit grosser Wahrscheinlichkeit schliessen können, dass die Transformationen, die Schering in seiner Theorie verwertet, Liesche Berührungstransformationen sind, die von der Zeit t abhängen. Jetzt wollen wir die Richtigkeit dieser Vermutung bestätigen.

Die Bedingung dafür, dass die Gleichungen

(12) $\psi_i = \psi_i(t, q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n), \varphi_i = \varphi_i(t, q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n)$

eine kanonische Transformation definieren, war bei Schering dargestellt durch die Relation

$$(11) \sum_1^n i \left[Dq_i \,.\, \Delta p_i - \Delta q_i \,.\, Dp_i \right] = \sum_1^n i \left[D\psi_i \,.\, \Delta\varphi_i - \Delta\psi_i \,.\, D\varphi_i \right] + Dt \,.\, \Delta E - \Delta t \,.\, DE.$$

Wir betrachten jetzt vermöge (12) die Veränderlichen $q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n$ als Funktionen von $t, \psi_1 \dots \psi_n, \varphi_1 \dots \varphi_n$ und entwickeln sodann die Gleichung (11). Wir erhalten

$$\sum_1^n i \left\{ \sum_1^n h \left[\frac{\vartheta q_i}{\vartheta t} Dt + \frac{\vartheta q_i}{\vartheta \psi_h} D\psi_h + \frac{\vartheta q_i}{\vartheta \varphi_h} D\varphi_h \right] \cdot \sum_1^n k \left[\frac{\vartheta p_i}{\vartheta t} \Delta t + \frac{\vartheta p_i}{\vartheta \psi_k} \Delta\psi_k + \frac{\vartheta p_i}{\vartheta \varphi_k} \Delta\varphi_k \right] - \sum_1^n k \left[\frac{\vartheta q_i}{\vartheta t} \Delta t + \frac{\vartheta q_i}{\vartheta \psi_k} \Delta\psi_k + \frac{\vartheta q_i}{\vartheta \varphi_k} \Delta\varphi_k \right] \cdot \sum_1^n h \left[\frac{\vartheta p_i}{\vartheta t} Dt + \frac{\vartheta p_i}{\vartheta \psi_h} D\psi_h + \frac{\vartheta p_i}{\vartheta \varphi_h} D\varphi_h \right] \right\}$$

Digitized by Google

$$= Dt \sum_1^n \left[\frac{\vartheta E}{\vartheta t} \Delta t + \frac{\vartheta E}{\vartheta \psi_k} \Delta \psi_k + \frac{\vartheta E}{\vartheta \varphi_k} \Delta \varphi_k \right] - \Delta t . \sum_1^n \left[\frac{\vartheta E}{\vartheta t} Dt \right.$$

$$\left. + \frac{\vartheta E}{\vartheta \psi_h} D\psi_h + \frac{\vartheta E}{\vartheta \varphi_h} D\varphi_h \right] + \sum_1^n \left[D\psi_i . \Delta \varphi_i - \Delta \psi_i . D\varphi_i \right]$$

oder

$$\sum_{h,k}^{1 \dots n} \left\{ D\psi_h . \Delta \psi_k . \sum_1^n \left[\frac{\vartheta q_i}{\vartheta \psi_h} \frac{\vartheta p_i}{\vartheta \psi_k} - \frac{\vartheta p_i}{\vartheta \psi_h} \frac{\vartheta q_i}{\vartheta \psi_k} \right] \right.$$

$$+ D\psi_h . \Delta \varphi_k . \sum_1^n \left[\frac{\vartheta q_i}{\vartheta \psi_h} \frac{\vartheta p_i}{\vartheta \varphi_k} - \frac{\vartheta p_i}{\vartheta \psi_h} \frac{\vartheta q_i}{\vartheta \varphi_k} \right]$$

$$+ D\varphi_h . \Delta \psi_k . \sum_1^n \left[\frac{\vartheta q_i}{\vartheta \varphi_h} \frac{\vartheta p_i}{\vartheta \psi_k} - \frac{\vartheta p_i}{\vartheta \varphi_h} \frac{\vartheta q_i}{\vartheta \psi_k} \right]$$

$$\left. + D\varphi_h . \Delta \varphi_k . \sum_1^n \left[\frac{\vartheta q_i}{\vartheta \varphi_h} \frac{\vartheta p_i}{\vartheta \varphi_k} - \frac{\vartheta p_i}{\vartheta \varphi_h} \frac{\vartheta q_i}{\vartheta \varphi_k} \right] \right\}$$

$$+ \sum_1^n \left\{ \Delta t . D\psi_h . \sum_1^n \left[\frac{\vartheta p_i}{\vartheta t} \frac{\vartheta q_i}{\vartheta \psi_h} - \frac{\vartheta q_i}{\vartheta t} \frac{\vartheta p_i}{\vartheta \psi_h} \right] \right\}$$

$$+ \sum_1^n \left\{ \Delta t . D\varphi_h . \sum_1^n \left[\frac{\vartheta p_i}{\vartheta t} \frac{\vartheta q_i}{\vartheta \varphi_h} - \frac{\vartheta q_i}{\vartheta t} \frac{\vartheta p_i}{\vartheta \varphi_h} \right] \right\}$$

$$+ \sum_1^n \left\{ Dt . \Delta \psi_k . \sum_1^n \left[\frac{\vartheta q_i}{\vartheta t} \frac{\vartheta p_i}{\vartheta \psi_k} - \frac{\vartheta p_i}{\vartheta t} \frac{\vartheta q_i}{\vartheta \psi_k} \right] \right\}$$

$$+ \sum_1^n \left\{ Dt . \Delta \varphi_k . \sum_1^n \left[\frac{\vartheta q_i}{\vartheta t} \frac{\vartheta p_i}{\vartheta \varphi_k} - \frac{\vartheta p_i}{\vartheta t} \frac{\vartheta q_i}{\vartheta \varphi_k} \right] \right\}$$

$$= \sum_1^n Dt . \Delta \psi_k . \frac{\vartheta E}{\vartheta \psi_k} + \sum_1^n Dt . \Delta \varphi_k . \frac{\vartheta E}{\vartheta \varphi_k} - \sum_1^n \Delta t . D\psi_h . \frac{\vartheta E}{\vartheta \psi_h}$$

$$- \sum_1^n \Delta t . D\varphi_h . \frac{\vartheta E}{\vartheta \varphi_h} + \sum_1^n \left[D\psi_i . \Delta \varphi_i - \Delta \psi_i . D\varphi_i \right] .$$

Da nun, wie wir immer vorausgesetzt haben, $\psi_1 \dots \psi_n$, $\varphi_1 \dots \varphi_n$ unabhängige Veränderliche sind, ergeben sich hieraus die folgenden Relationen

Digitized by Google

III.
$$\begin{cases} \sum_1^n \left[\frac{\vartheta q_i}{\vartheta \psi_h}\frac{\vartheta p_i}{\vartheta \psi_k} - \frac{\vartheta p_i}{\vartheta \psi_h}\frac{\vartheta q_i}{\vartheta \psi_k}\right] = 0, \\ \sum_1^n \left[\frac{\vartheta q_i}{\vartheta \psi_h}\frac{\vartheta p_i}{\vartheta \varphi_k} - \frac{\vartheta p_i}{\vartheta \psi_h}\frac{\vartheta q_i}{\vartheta \varphi_k}\right] = 0 \text{ für } h \neq k, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = 1 \text{ für } h = k, \\ \sum_1^n \left[\frac{\vartheta q_i}{\vartheta \varphi_h}\frac{\vartheta p_i}{\vartheta \varphi_k} - \frac{\vartheta p_i}{\vartheta \varphi_h}\frac{\vartheta q_i}{\vartheta \varphi_k}\right] = 0, \\ \sum_1^n \left[\frac{\vartheta q_i}{\vartheta t}\frac{\vartheta p_i}{\vartheta \psi_k} - \frac{\vartheta p_i}{\vartheta t}\frac{\vartheta q_i}{\vartheta \psi_k}\right] = \frac{\vartheta E}{\vartheta \psi_k}, \\ \sum_1^n \left[\frac{\vartheta q_i}{\vartheta t}\frac{\vartheta p_i}{\vartheta \varphi_k} - \frac{\vartheta p_i}{\vartheta t}\frac{\vartheta q_i}{\vartheta \varphi_k}\right] = \frac{\vartheta E}{\vartheta \varphi_k}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind nichts anderes als die Bedingungsgleichungen III oder die Lagrangeschen Formeln. Es ist nun offenbar nach der ersten der obigen Relationen

$$\sum_1^n \sum_1^n \left[\frac{\vartheta q_j}{\vartheta \psi_h}\frac{\vartheta p_j}{\vartheta \psi_k}\frac{\delta \psi_h}{\delta q_i} - \frac{\vartheta p_j}{\vartheta \psi_h}\frac{\vartheta q_j}{\vartheta \psi_k}\frac{\delta \psi_h}{\delta q_i}\right] = 0$$

und nach der zweiten

$$\sum_1^n \sum_1^n \left[\frac{\vartheta q_j}{\vartheta \psi_k}\frac{\vartheta p_j}{\vartheta \varphi_h}\frac{\delta \varphi_h}{\delta q_i} - \frac{\vartheta p_j}{\vartheta \psi_k}\frac{\vartheta q_j}{\vartheta \varphi_h}\frac{\delta \varphi_h}{\delta q_i}\right] = \frac{\delta \varphi_k}{\delta q_i}.$$

Subtrahieren wir beide Gleichungen von einander, so ergiebt sich

$$\sum_1^n \left[\frac{\vartheta p_j}{\vartheta \psi_k} \sum_1^n \left(\frac{\vartheta q_j}{\vartheta \psi_h}\frac{\delta \psi_h}{\delta q_i} + \frac{\vartheta q_j}{\vartheta \varphi_h}\frac{\delta \varphi_h}{\delta q_i}\right)\right.$$
$$\left. - \sum_1^n \left(\frac{\vartheta p_j}{\vartheta \psi_h}\frac{\delta \psi_h}{\delta q_i} + \frac{\vartheta p_j}{\vartheta \varphi_h}\frac{\delta \varphi_h}{\delta q_i}\right)\frac{\vartheta q_j}{\vartheta \psi_k}\right] = -\frac{\delta \varphi_k}{\delta q_i}.$$

Mithin erhält man

$$\frac{\vartheta p_i}{\vartheta \psi_k} = -\frac{\delta \varphi_k}{\delta q_i}.$$

Auf ähnliche Weise bekommt man schliesslich die Relationen

II.
$$\begin{cases} \frac{\vartheta q_i}{\vartheta \psi_k} = \frac{\delta \varphi_k}{\delta p_i}, \frac{\vartheta q_i}{\vartheta \varphi_k} = -\frac{\delta \psi_k}{\delta p_i}, \frac{\vartheta q_i}{\vartheta t} = \frac{\delta E}{\delta p_i}, \\ \frac{\vartheta p_i}{\vartheta \psi_k} = -\frac{\delta \varphi_k}{\delta q_i}, \frac{\vartheta p_i}{\vartheta \varphi_k} = \frac{\delta \psi_k}{\delta q_i}, \frac{\vartheta p_i}{\vartheta t} = -\frac{\delta E}{\delta q_i}, \\ \frac{\vartheta E}{\vartheta \psi_k} = \frac{\delta \varphi_k}{\delta t}, \frac{\vartheta E}{\vartheta \varphi_k} = -\frac{\delta \psi_k}{\delta t}, \frac{\vartheta E}{\vartheta t} = \frac{\delta E}{\delta t}, \end{cases}$$

Digitized by Google

die wir früher als Bedingungen II bezeichnet haben. Verbindet man dieselben endlich mit den vorhin abgeleiteten Gleichungen III, so resultieren daraus unsere ursprünglichen Bedingungen I und (15c)

$$\text{I.} \qquad (w_i, \psi_k) = (\varphi_i, \varphi_k) = (\psi_i, \varphi_k) = 0, \ (\psi_i, \varphi_i) = 1,$$

$$(15c) \qquad (E, \psi_l) = \frac{\partial \psi_i}{\partial t}, (E, \varphi_i) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial t},$$

welche die Transformation

$$\psi_i = \psi_i (t, q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n), \varphi_i = \varphi_i (t, q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n)$$

als Berührungstransformation definieren. Es ist somit dargethan, dass die Transformationen, deren sich Schering bei seiner Substitutionstheorie bedient, Berührungstransformationen in den Veränderlichen $q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n$ sind, die überdies noch die Zeit t in expliciter Form enthalten.

Zweiter Teil.

Bestimmung der kanonischen Substitution oder Berührungstransformation des mechanischen Problems durch eine gegebene unvollständige Reihe der eingeführten Veränderlichen.

Dem zweiten Teil dieser Arbeit liegt die zweite Abhandlung von Schering: „Verallgemeinerung der Poisson-Jakobischen Störungsformeln“ zu Grunde. Das Wesentliche aber, wie es uns scheint, oder wenigstens das, was für die Untersuchung über dynamische Differentialgleichungen in der Hamiltonschen Form von Bedeutung ist, liegt nicht in der von Schering gegebenen Verallgemeinerung der Poisson-Jakobischen Formeln, sondern vielmehr in der Lösung des in vorstehender Überschrift angekündigten Problems, die Schering überdies in derselben Abhandlung veröffentlicht hat. Wir werden in diesem Abschnitte unserer Arbeit zeigen, wie dieses Problem seine Erledigung findet, wenn man sich der von Lie begründeten Theorie der Funktionengruppen bedient. Bevor wir jedoch im Anschluss an diese wichtige Theorie unser Problem in Angriff nehmen, wollen wir, weil wir uns einmal mit der zweiten Abhandlung Scherings beschäftigen,

Digitized by Google

im kommenden Kapitel, wenn auch nur kurz, das berühren was Scherings Arbeit neben der Lösung des fraglichen Problems noch enthält.

Sechstes Kapitel.

Normale Substitution. Verallgemeinerung der Poisson-Jakobischen Störungsformeln.

Liegt eine Berührungstransformation

(1) $\psi_i = \psi_i(t, q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n), \varphi_i = \varphi_i(t, q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n)$ $(i = 1 \dots n)$

vor, deren Funktionen $\psi_1 \dots \psi_n, \varphi_1 \dots \varphi_n$ die kanonischen Bedingungen I erfüllen und die überdies die einfache Form der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen bewahrt, so ist es natürlich keineswegs notwendig, dass sich die Grössen $p_1 \dots p_n, \varphi_1 \dots \varphi_n$ aus den Gleichungen (1) als Funktionen von $t, q_1 \dots q_n, \psi_1 \dots \psi_n$ darstellen lassen. Schering bemerkt aber, dass man eine jede kanonische Substitution oder Berührungstransformation (1) durch etwaige Vertauschung der Glieder einzelner Paare von zusammengehörigen Grössen q_k und p_k mit $-p_k$ und q_k in eine solche Form bringen kann, dass alle vorkommenden Grössen durch die unabhängigen Veränderlichen $t, q_1 \dots q_n, \psi_1 \dots \psi_n$ bestimmbar sind, ohne dass die Transformation, die aus dieser Vertauschung hervorgeht, aufhört, Berührungstransformation zu sein. Diese so erhaltene neue Form der Berührungstransformation nennt er die normale Form der Substitution. Wegen der vielfachen Anwendung des Satzes, dass jede kanonische Substitution oder Berührungstransformation eine normale Form annehmen kann, beweist Schering den Satz „mit der geringsten Anzahl der notwendigen Voraussetzungen", den er folgendermassen ausspricht: „Besitzen die Funktionen $\psi_1 \dots \psi_n$ mit den unabhängigen Veränderlichen $q_{-n} \dots q_{-1}, q_1 \dots q_n$ die Eigenschaft, dass für je zwei der Funktionen ψ_μ, ψ_ν die Summe ihrer nach je zwei konjugierten Elementen q_ι und $q_{-\iota}$ genommenen Funktionaldeterminanten identisch zu Null wird

(2) $$\sum_{\iota=1}^{\iota=n} \frac{\delta(\psi_\mu, \psi_\nu)}{\delta(q_\iota, q_{-\iota})} = 0,$$

Digitized by Google

und verschwinden nicht sämtliche n.n-gliedrige Funktionaldeterminanten, nämlich die

$$\frac{\delta(\psi_1 \dots \psi_n)}{\delta(q_{h_1} \dots q_{h_n})},$$

worin $h_1 \dots h_n$ irgend welche n Zahlen aus der Reihe $\pm 1 \dots \pm n$ bedeuten, so giebt es unter diesen nicht verschwindenden Funktionaldeterminanten auch wenigstens eine solche, für welche die absoluten Werte der $h_1 \dots h_n$ alle von einander verschieden sind."

Setzt man $q_{-\iota} = p_\iota$, so geht die Identität (2) über in die folgende

$$(\psi_\mu, \psi_\nu) \equiv \sum_1^n{}_i \left[\frac{\delta \psi_\mu}{\delta q_i} \frac{\delta \psi_\nu}{\delta p_i} - \frac{\delta \psi_\nu}{\delta q_i} \frac{\delta \psi_\mu}{\delta p_i} \right] = 0$$

und nimmt man noch an, wie es Schering auch in seinem Satze thut, dass $\psi_1 \dots \psi_n$ überdies unabhängige Funktionen von $q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n$ sind, so findet man den obigen Satz Scherings auf einfache Weise in den Betrachtungen bewiesen, die Lie im zweiten Bande seines Werkes über die „Theorie der Transformationsgruppen" auf S. 95 f. angestellt hat.

Was endlich die Verallgemeinerung der Poisson-Jakobischen Störungsformeln anbetrifft, so ist diese bei Schering durch Relationen zwischen mehrgliedrigen Funktionaldeterminanten gegeben, die, an sich nichts Neues aussagend, nur eine direkte Folge der von Poisson und Jakobi gefundenen Formeln sind. Wir beschränken uns daher auf die Ableitung der verallgemeinerten Jakobischen Störungsformeln und verweisen im übrigen auf den letzten Artikel, den Artikel VIII der zweiten Abhandlung Scherings.

Wir hatten im ersten Teile dieser Arbeit die Jakobischen Störungsformeln als Bedingungen II bezeichnet. Sie lauteten:

$$\text{II.} \quad \begin{cases} \frac{\vartheta q_i}{\vartheta \psi_k} = \frac{\delta \varphi_k}{\delta p_i}, \frac{\vartheta q_i}{\vartheta \varphi_k} = -\frac{\delta \psi_k}{\delta p_i}, \frac{\vartheta q_i}{\vartheta t} = \frac{\delta E}{\delta p_i}, \\ \frac{\vartheta p_i}{\vartheta \psi_k} = -\frac{\delta \varphi_k}{\delta q_i}, \frac{\vartheta p_i}{\vartheta \varphi_k} = \frac{\delta \psi_k}{\delta q_i}, \frac{\vartheta p_i}{\vartheta t} = -\frac{\delta E}{\delta q_i}, \\ \frac{\vartheta E}{\vartheta \psi_k} = \frac{\delta \varphi_k}{\delta t}, \frac{\vartheta E}{\vartheta \varphi_k} = -\frac{\delta \psi_k}{\delta t}, \frac{\vartheta E}{\vartheta t} = \frac{\delta E}{\delta t}. \end{cases}$$

(i, k = 1 ... n)

Digitized by Google

Setzt man nun mit Schering für eine positive Zahl μ

$$q_{-\mu} = -p_\mu,\ p_{-\mu} = q_\mu,\ q_0 = t, p_0 = -E,$$
$$\psi_{-\mu} = -\varphi_\mu,\ \varphi_{-\mu} = \psi_\mu,\ \psi_0 = t, \varphi_0 = E,$$

so lassen sich sämtliche Formeln II in der gemeinsamen Form

II'. $$\frac{\vartheta p_i}{\vartheta \psi_k} = -\frac{\delta \varphi_k}{\delta q_i}$$

schreiben, wo die Indices i und k die Werte $0, \pm 1 \ldots \pm n$ annehmen. Wir werden mit Schering, wenn $y_{i_1} \ldots y_{i_n}$ die Funktionen und $x_{k_1} \ldots x_{k_n}$ die unabhängigen Variabeln bedeuten, eine Funktionaldeterminante in der abgekürzten Form

$$\frac{\delta (y \mid i_1 \ldots i_\nu)}{\delta (x \mid k_1 \ldots k_\nu)}$$

darstellen. Nehmen wir alsdann die Funktionaldeterminante

$$\frac{\vartheta (p \mid i_1 \ldots i_\nu)}{\vartheta (\psi \mid k_1 \ldots k_\nu)}$$

und setzen hierin für $\frac{\vartheta p_i}{\vartheta \psi_k}$ die aus II' sich ergebenden Werte $-\frac{\delta \varphi_k}{\delta q_i}$ ein, so kommt

$$\begin{vmatrix} \frac{\vartheta p_{i_1}}{\vartheta \psi_{k_1}} & \frac{\vartheta p_{i_1}}{\vartheta \psi_{k_2}} & \cdots & \frac{\vartheta p_{i_1}}{\vartheta \psi_{k_{\nu-1}}} & \frac{\vartheta p_{i_1}}{\vartheta \psi_{k_\nu}} \\ \frac{\vartheta p_{i_2}}{\vartheta \psi_{k_1}} & \frac{\vartheta p_{i_2}}{\vartheta \psi_{k_2}} & \cdots & \frac{\vartheta p_{i_2}}{\vartheta \psi_{k_{\nu-1}}} & \frac{\vartheta p_{i_2}}{\vartheta \psi_{k_\nu}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\vartheta p_{i_{\nu-1}}}{\vartheta \psi_{k_1}} & \frac{\vartheta p_{i_{\nu-1}}}{\vartheta \psi_{k_2}} & \cdots & \frac{\vartheta p_{i_{\nu-1}}}{\vartheta \psi_{k_{\nu-1}}} & \frac{\vartheta p_{i_{\nu-1}}}{\vartheta \psi_{k_\nu}} \\ \frac{\vartheta p_{i_\nu}}{\vartheta \psi_{k_1}} & \frac{\vartheta p_{i_\nu}}{\vartheta \psi_{k_2}} & \cdots & \frac{\vartheta p_{i_\nu}}{\vartheta \psi_{k_{\nu-1}}} & \frac{\vartheta p_{i_\nu}}{\vartheta \psi_{k_\nu}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{\delta \varphi_{k_1}}{\delta q_{i_1}} & -\frac{\delta \varphi_{k_2}}{\delta q_{i_1}} & \cdots & -\frac{\delta \varphi_{k_{\nu-1}}}{\delta q_{i_1}} & -\frac{\delta \varphi_{k_\nu}}{\delta q_{i_1}} \\ -\frac{\delta \varphi_{k_1}}{\delta q_{i_2}} & -\frac{\delta \varphi_{k_2}}{\delta q_{i_2}} & \cdots & -\frac{\delta \varphi_{k_{\nu-1}}}{\delta q_{i_2}} & -\frac{\delta \varphi_{k_\nu}}{\delta q_{i_2}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{\delta \varphi_{k_1}}{\delta q_{i_{\nu-1}}} & -\frac{\delta \varphi_{k_2}}{\delta q_{i_{\nu-1}}} & \cdots & -\frac{\delta \varphi_{k_{\nu-1}}}{\delta q_{i_{\nu-1}}} & -\frac{\delta \varphi_{k_\nu}}{\delta q_{i_{\nu-1}}} \\ -\frac{\delta \varphi_{k_1}}{\delta q_{i_\nu}} & -\frac{\delta \varphi_{k_2}}{\delta q_{i_\nu}} & \cdots & -\frac{\delta \varphi_{k_{\nu-1}}}{\delta q_{i_\nu}} & -\frac{\delta \varphi_{k_\nu}}{\delta q_{i_\nu}} \end{vmatrix}$$

Hieraus folgt sogleich

(3) $$\frac{\vartheta (p \mid i_1 \ldots i_\nu)}{\vartheta (\psi \mid k_1 \ldots k_\nu)} = (-1)^\nu \frac{\delta (\varphi \mid k_1 \ldots k_\nu)}{\delta (q \mid i_1 \ldots i_\nu)}.$$

Das sind die von Schering aufgestellten „verallgemeinerten" Jakobischen Störungsformeln. Aus (3) ergiebt sich dann,

Digitized by Google

wenn die Indices $i_1 \dots i_\nu$, $k_1 \dots k_\nu$ die ganze Reihe der Zahlen $\pm 1 \dots \pm n$ ausfüllen, die Relation

$$\frac{\vartheta(q_1 \dots q_n\, p_1 \dots p_n)}{\vartheta(\psi_1 \dots \psi_n, \varphi_1 \dots \varphi_n)} = \frac{\delta(\psi_1 \dots \psi_n, \varphi_1 \dots \varphi_n)}{\delta(q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n)}.$$

Verbindet man diese Beziehung mit der Gleichung

$$\frac{\vartheta(q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n)}{\vartheta(\psi_1 \dots \psi_n, \varphi_1 \dots \varphi_n)} \cdot \frac{\delta(\psi_1 \dots \psi_n, \varphi_1 \dots \varphi_n)}{\delta(q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n)} = 1,$$

in welcher der Fundamentalsatz von Jakobi über vollständige Funktionaldeterminanten enthalten ist, so bekommt man

$$\frac{\vartheta(q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n)}{\vartheta(\psi_1 \dots \psi_n, \varphi_1 \dots \varphi_n)} = \frac{\delta(\psi_1 \dots \psi_n, \varphi_1 \dots \varphi_n)}{\delta(q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n)} = \pm 1.$$

Dieser Satz rührt von Jakobi*) her. Das Vorzeichen endlich hat Schering im Artikel VIII seiner zweiten Abhandlung bestimmt. Er findet daselbst

$$\frac{\delta(\psi_1 \dots \psi_n, \varphi_1 \dots \varphi_n)}{\delta(q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n)} = +1.$$

Siebentes Kapitel.

Bestimmung der Berührungstransformation des mechanischen Problems durch eine gegebene unvollständige Reihe der eingeführten Veränderlichen.

Im vierten Kapitel dieser Arbeit haben wir gesehen, dass die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Transformation

$$(1) \quad \psi_i = \psi_i(t, q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n), \varphi_i = \varphi_i(t, q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n) \quad (i = 1 \dots n)$$

die einfache Form sämtlicher Systeme von Differentialgleichungen

$$(2) \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\delta H(t, q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n)}{\delta p_i}, \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\delta H(t, q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n)}{\delta q_i} \quad (i = 1 \dots n)$$

bewahrt, durch die Relationen

$$\text{I.} \quad (\psi_i, \psi_k) = 0, (\varphi_i, \varphi_k) = 0, (\psi_i, \varphi_k) = 0, (\psi_i, \varphi_i) = 1 \quad (i, k = 1 \dots n)$$

gegeben sind. Hierbei geht das System (2) in das ähnliche System

*) Jakobi, Vorlesungen über Dynamik, herausgegeben von A. Clebsch: S. 499.

Digitized by Google

$$(3) \qquad \frac{d\psi_i}{dt} = \frac{\vartheta(H-E)}{\vartheta\varphi_i}, \frac{d\varphi_i}{dt} = -\frac{\vartheta(H-E)}{\vartheta\psi_i} \qquad (i=1\ldots n)$$

über, wo nun $H-E$ als Funktion der unabhängigen Veränderlichen $t, \psi_1 \ldots \psi_n, \varphi_1 \ldots \varphi_n$ zu betrachten ist und die Differentiation ϑ, wie wir es stets gehalten haben, auf diese unabhängigen Variabeln sich bezieht. Was die Funktion E anbelangt, so haben wir bewiesen, dass sie den Gleichungen

$$(4) \qquad (E, \psi_i) = \frac{\delta\psi_i}{\delta t}, (E, \varphi_i) = \frac{\delta\varphi_i}{\delta t} \qquad (i=1\ldots n)$$

genügt, und ferner den Nachweis erbracht, dass, wenn die Transformation (1) die Bedingungen I erfüllt, die Funktion E durch Quadratur zu bestimmen ist.

Es erhebt sich nun die Frage: kann man, wenn nur eine geringere Anzahl von den $(2n+1)$ Funktionen $\psi_1 \ldots \psi_n$, $\varphi_1 \ldots \varphi_n$, E vorliegt, die aber die kanonischen Bedingungen I und (4) befriedigt, auch dann noch immer die geringere Zahl dieser Funktionen zu den $(2n+1)$ Grössen $\psi_1 \ldots \psi_n$, $\varphi_1 \ldots \varphi_n$, E so vervollständigen, dass die Transformation (1) eine Berührungstransformation oder, was hier dasselbe sagt, eine kanonische Substitution darstellt, die alle Systeme (2) in Systeme von derselben Form (3) überführt? Schering weist nach, dass diese Frage zu bejahen ist. Auch wir werden als letztes, was uns in dieser Arbeit beschäftigen soll, hierzu die Bestätigung liefern, und zwar stützen wir uns dabei auf die von Lie aufgestellte Theorie der kanonischen Funktionengruppen, die sich in angemessenster Weise der Behandlung des vorgegebenen Problems darbietet. Indem wir auf das achte und neunte Kapitel im zweiten Bande der Theorie der Transformationsgruppen von Lie verweisen, setzen wir die Kenntnis der Theorie der Funktionengruppen im allgemeinen und derjenigen in der besonderen, so genannten kanonischen Form voraus. Wenden wir uns also jetzt zur Lösung unserer Aufgabe.

Es sei, wie im gestellten Problem angenommen wird, eine beliebige Anzahl von den $(2n+1)$ Funktionen

$\psi_1(t, q_1 \ldots q_n, p_1 \ldots p_n) \ldots \psi_n(t, q_1 \ldots q_n, p_1 \ldots p_n)$, $\varphi_1(t, q_1 \ldots q_n, p_1 \ldots p_n) \ldots \varphi_n(t, q_1 \ldots q_n, p_1 \ldots p_n)$, $E(t, q_1 \ldots q_n, p_1 \ldots p_n)$,

Digitized by Google

die die Bedingungen

$$\text{I} \qquad (\psi_i, \psi_k) = 0, (\varphi_i, \varphi_k) = 0, (\psi_i, \varphi_k) = 0, (\psi_i, \varphi_i) = 1 \qquad (i, k = 1 \ldots n)$$

und

$$(4) \qquad (E, \psi_i) = \frac{\partial \psi_i}{\partial t}, (E, \varphi_i) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \qquad (i = 1 \ldots n)$$

befriedigt, vorgelegt. Wir unterscheiden von vornherein zwei Fälle, je nachdem die Funktion E unter den gegebenen Funktionen vorkommt oder nicht. Wir beginnen mit dem letzteren Fall als demjenigen, der am schnellsten durch die Theorie der kanonischen Funktionengruppen erledigt werden kann.

Erster Fall: E ist nicht unter den gegebenen Funktionen vorhanden.

Von den Funktionen $\psi_1 \ldots \psi_n, \varphi_1 \ldots \varphi_n$ mögen beliebig viele vorliegen. Man kann dann immer erreichen, dass die gegebenen Funktionen die folgenden

$$(5) \qquad \varphi_1 \ldots \varphi_\mu, \psi_1 \ldots \psi_{\mu+\nu}$$

sind, wo $\nu \geqq 0$ ist, oder wenigstens die übrigen Fälle $\nu < 0$ in ganz ähnlicher Weise behandeln wie den Fall (5) $\nu \geqq 0$. Die Funktionen (5) befriedigen nach Voraussetzung die Bedingungen I und sollen ausserdem von einander unabhängig sein. Lie hat aber gezeigt, dass es für die Unabhängigkeit der Funktionen (5), wenn sie den Bedingungen I genügen, notwendig und hinreichend ist, dass die Funktionen $\psi_{\mu+1} \cdots \psi_{\mu+\nu}$ von einander unabhängig sind. Die Funktionen

$$(5) \qquad \varphi_1 \ldots \varphi_\mu, \psi_1 \ldots \psi_{\mu+\nu}$$

bilden dann nach Lie eine $(2\mu+\nu)$-gliedrige kanonische Funktionengruppe. Ist ν nicht gleich Null, so lassen sich nach Lies Untersuchungen stets solche weitere Funktionen $\varphi_{\mu+1} \cdots \varphi_{\mu+\nu}$ ermitteln, so dass die Funktionen

$$\varphi_1 \ldots \varphi_{\mu+\nu}, \psi_1 \ldots \psi_{\mu+\nu}$$

eine $(2\mu+2\nu)$-gliedrige kanonische Gruppe bilden oder in anderen Worten unabhängige Funktionen bedeuten, die die Relationen I erfüllen. Zu diesen Funktionen lässt sich dann, wie Lie weiter entwickelt, eine Funktion $\psi_{\mu+\nu+1}$ und hier-

Digitized by Google

auf eine Funktion $\varphi_{\mu+\nu+1}$ u. s. f. angeben, bis man schliesslich zu 2n von einander unabhängigen Funktionen

$$\psi_1 \cdots \psi_n, \varphi_1 \cdots \varphi_n$$

gelangt, die eine 2n-gliedrige kanonische Gruppe darstellen oder, was dasselbe besagt, den Bedingungen I Genüge leisten. Da die Bedingungen I ausreichen, um die Transformation

(1) $\psi_i = \psi_i(t, q_1 \cdots q_n, p_1 \cdots p_n), \varphi_i = \varphi_i(t, q_1 \cdots q_n, p_1 \cdots p_n)$

als eine kanonische zu charakterisieren, haben wir im vierten Kapitel bestätigen können, dass sich die Funktion E endlich durch Quadratur bestimmen lässt.

Wir haben so den ersten Fall erledigt und gehen jetzt zur Behandlung des zweiten über.

Zweiter Fall: E ist unter den gegebenen Funktionen vorhanden.

Es seien jetzt — auf diesen Fall dürfen wir uns beschränken — die folgenden Funktionen

(6) $$\varphi_1 \cdots \varphi_\mu, \psi_1 \cdots \psi_{\mu+\nu}, E$$

bekannt, die die Bedingungen I und (4) erfüllen, und $\psi_{\mu+1} \cdots \psi_{\mu+\nu}$ seien von einander unabhängig, was zur Folge hat, dass $\varphi_1 \cdots \varphi_\mu, \psi_1 \cdots \psi_{\mu+\nu}$ unabhängige Funktionen sind. In Lies Sprache bilden dann die Funktionen

(5) $$\varphi_1 \cdots \varphi_\mu, \psi_1 \cdots \psi_{\mu+\nu}$$

eine $(2\mu+\nu)$-gliedrige kanonische Funktionengruppe. Lassen wir eine der ν ausgezeichneten Funktionen $\psi_{\mu+1} \cdots \psi_{\mu+\nu}$, etwa $\psi_{\mu+1}$ weg, so erhalten wir die Gruppe

(7) $$\varphi_1 \cdots \varphi_\mu, \psi_1 \cdots \psi_\mu, \psi_{\mu+2} \cdots \psi_{\mu+\nu}.$$

In der Polargruppe der Gruppe (7) kommt die Funktion $\psi_{\mu+1}$ vor; wir können sie daher auf die Form

(8) $$\psi_{\mu+1} \equiv u_1, u_2 \cdots u_{2n-2\mu-\nu+1}$$

bringen. Hierbei sind die Funktionen (8) die $(2n - 2\mu - \nu + 1)$ unabhängigen Lösungen des $(2\mu+\nu-1)$-gliedrigen vollständigen Systems

(9) $$(\varphi_1, f) = 0, \ldots (\varphi_\mu, f) = 0, (\psi_1, f) = 0, \ldots (\psi_\mu, f) = 0,$$
$$(\psi_{\mu+2}, f) = 0, \ldots (\psi_{\mu+\nu}, f) = 0.$$

Es giebt dann nach der Theorie der Funktionengruppen unter den Funktionen, die der Gruppe (8) angehören, sicher eine Funktion

Digitized by Google

$$\varphi_{\mu+1} \equiv F(t, u_1 \dots u_{2n-2\mu-\nu+1}),$$

welche die Gleichung

(10) $$(\psi_{\mu+1}, \varphi_{\mu+1}) = 1$$

erfüllt. Und es ist nur noch die Frage, ob man erreichen kann, dass $\varphi_{\mu+1}$ auch der Gleichung

(11) $$(E, \varphi_{\mu+1}) = \frac{\delta \varphi_{\mu+1}}{\delta t}$$

Genüge leistet. Dies werden wir in der That durch folgende Betrachtungen verificieren können. Die Funktion $\varphi_{\mu+1}$ soll also zunächst als Funktion von $t, u_1 \dots u_{2n-2\mu-\nu+1}$ der Gleichung (11) oder der folgenden

$$\sum_1^{2n-2\mu-\nu+1 \,i} \frac{\mathfrak{d} f}{\mathfrak{d} u_i} (E, u_i) = \sum_1^{2n-2\mu-\nu+1 \,i} \frac{\mathfrak{d} f}{\mathfrak{d} u_i} \frac{\delta u_i}{\delta t} + \frac{\mathfrak{d} f}{\mathfrak{d} t}$$

oder der äquivalenten Relation

(12) $$-\frac{\mathfrak{d} f}{\mathfrak{d} t} + \sum_1^{2n-2\mu-\nu+1 \,i} \left[(E, u_i) - \frac{\delta u_i}{\delta t} \right] \frac{\mathfrak{d} f}{\mathfrak{d} u_i} = 0$$

genügen, wo die partielle $\mathfrak{d}$-Differentiation sich auf die unabhängigen Grössen $t, u_1 \dots u_{2n-2\mu-\nu+1}$ bezieht. Soll nun die Differentialgleichung (12) nur solche Funktionen definieren, die von $t, u_1 \dots u_{2n-2\mu-\nu+1}$ abhängen, so darf der Ausdruck

$$\left[(E, u_i) - \frac{\delta u_i}{\delta t} \right]$$

die Veränderlichen $t, q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n$ nur in den Verbindungen $t, u_1 \dots u_{2n-2\mu-\nu+1}$ enthalten. Dies ist wirklich der Fall. Um dies einzusehen, verfahren wir folgendermassen. Es ist nach (4)

$$(E, \varphi_k) = \frac{\delta \varphi_k}{\delta t}, \qquad (k = 1 \dots \mu)$$

also wird

$$\left((E, \varphi_k) u_i \right) = \left(\frac{\delta \varphi_k}{\delta t}, u_i \right)$$

oder, weil $(\varphi_k, u_i) \equiv 0$ ist, auch

$$\left((E, \varphi_k) u_i \right) = \left(\frac{\delta u_i}{\delta t}, \varphi_k \right).$$

Digitized by Google

Verbindet man diese Identität mit der bekannten Jakobischen, so ergiebt sich endlich

$$\left((E, u_i) - \frac{\partial u_i}{\partial t}, \varphi_k\right) = 0.$$
$$(k = 1 \dots \mu)$$

Auf gleiche Weise findet man

$$\left((E, u_i) - \frac{\partial u_i}{\partial t}, \psi_j\right) = 0.$$
$$(j = 1 \dots \mu, \mu+2 \dots \mu+\nu)$$

Die beiden letzten Gleichungen sagen aber aus, dass die Funktion

$$(E, u_i) - \frac{\partial u_i}{\partial t}$$

eine Lösung des vollständigen Systems (9) ist und somit nur explicite von $t, u_1 \dots u_{2n-2\mu-\nu+1}$ abhängt. Hieraus folgt, dass es eine Funktion von $t, u_1 \dots u_{2n-2\mu-\nu+1}$ giebt, die die Differentialgleichung (12) befriedigt. Sind $v_1 \dots v_{2n-2\mu-\nu+1}$ die unabhängigen Lösungen der Gleichung (12), so ist die allgemeine Lösung derselben

$$\Phi(v_1 \dots v_{2n-2\mu-\nu+1})$$

eine beliebige Funktion von $v_1 \dots v_{2n-2\mu-\nu+1}$. Es fragt sich nun nur noch, ob die Funktion Φ so gewählt werden kann, dass sie die Gleichung

$$(\psi_{\mu+1}, \Phi) = 1 \tag{10}$$

oder, was dasselbe sagt, die Gleichung

$$\sum_{1}^{2n-2\mu-\nu+1} \frac{\vartheta \Phi}{\vartheta v_k} (\psi_{\mu+1}, v_k) = 1 \tag{10'}$$

erfüllt, wenn ϑ die partielle Differentiation nach den unabhängigen Grössen $v_1 \dots v_{2n-2\mu-\nu+1}$ bedeutet. Es ist dazu nur erforderlich, dass die Ausdrücke $(\psi_{\mu+1}, v_k)$ blosse Funktionen von $v_1 \dots v_{2n-2\mu-\nu+1}$ sind. Die Lösung v_k der Differentialgleichung (12) genügt nämlich offenbar der mit (12) gleichwertigen Gleichung (11). Es ist daher

$$(E, v_k) = \frac{\partial v_k}{\partial t}.$$

Digitized by Google

Hieraus ergiebt sich

$$\Big((\mathrm{E}, \mathrm{v_k})\,\psi_{\mu+1}\Big) = \Big(\frac{\partial\,\mathrm{v_k}}{\partial\,t}, \psi_{\mu+1}\Big).$$

Nach der Jakobischen Identität ist aber

$$\Big((\mathrm{E}, \mathrm{v_k})\,\psi_{\mu+1}\Big) + \Big((\mathrm{v_k}, \psi_{\mu+1})\,\mathrm{E}\Big) + \Big((\psi_{\mu+1}, \mathrm{E})\,\mathrm{v_k}\Big) = 0$$

und überdies ist nach der Voraussetzung, die wir über die Funktionen $\varphi_1 \ldots \varphi_\mu$, $\psi_1 \ldots \psi_{\mu+\nu}$ gemacht haben,

$$(\mathrm{E}, \psi_{\mu+1}) = \frac{\partial\,\psi_{\mu+1}}{\partial\,t},$$

also kommt nach einigen Umformungen

$$\Big(\mathrm{E}, (\mathrm{v_k}, \psi_{\mu+1})\Big) = \frac{\partial}{\partial\,t}(\mathrm{v_k}, \psi_{\mu+1}),$$

d. h. $(\mathrm{v_k}, \psi_{\mu+1})$ ist Lösung von (11) oder (12) und ist mithin eine Funktion von $\mathrm{v_1} \ldots \mathrm{v_{2n-2\mu-\nu+1}}$, was wir beweisen wollten. Durch die obigen Betrachtungen haben wir also bewiesen, dass es eine Funktion $\varphi_{\mu+1} = \Phi$ giebt, welche die Gleichungen (10) und (11) befriedigt. Wiederholen wir die gemachten Überlegungen, so kommen wir zu der Einsicht, dass es weitere Funktionen $\varphi_{\mu+2} \ldots \varphi_{\mu+\nu}$ giebt, so dass die Funktionen $\varphi_1 \ldots \varphi_{\mu+\nu}$, $\psi_1 \ldots \psi_{\mu+\nu}$ eine $(2\mu + 2\nu)$-gliedrige Funktionengruppe darstellen und sämtlich den Bedingungen

$$(\mathrm{E}, \psi_\mathrm{k}) = \frac{\partial\,\psi_\mathrm{k}}{\partial\,t}, (\mathrm{E}, \varphi_\mathrm{k}) = \frac{\partial\,\varphi_\mathrm{k}}{\partial\,t}$$
$$(\mathrm{k} = 1 \ldots \mu+\nu)$$

genügen. Wir können uns demnach auf den Fall beschränken, dass die folgenden Funktionen

$$\varphi_1 \ldots \varphi_\lambda,\ \psi_1 \ldots \psi_\lambda,\ \mathrm{E}$$

vorliegen, wobei die Funktionen $\varphi_1 \ldots \varphi_\lambda, \psi_1 \ldots \psi_\lambda, \mathrm{E}$ die Bedingungen I und (4) erfüllen. Die Polargruppe zu der 2λ-gliedrigen kanonischen Funktionengruppe sei

$$\mathrm{u_1} \ldots \mathrm{u_{2n-2\lambda}}.$$

Wir greifen aus dieser eine beliebige Funktion, etwa

$$\mathrm{f}(t, \mathrm{u_1} \ldots \mathrm{u_{2n-2\lambda}})$$

heraus, dann genügt f den kanonischen Bedingungen I, und wir haben nur noch zu verlangen, dass f die Gleichung

Digitized by Google

$$(E, f) = \frac{\partial f}{\partial t}$$

oder die äquivalente Gleichung

$$-\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{1}^{2n-2\lambda}{}_i \left[(E, u_i) - \frac{\partial u_i}{\partial t}\right] \frac{\partial f}{\partial u_i} = 0$$

befriedigt. Eine solche Funktion f von $t, u_1 \dots u_{2n-2\lambda}$ lässt sich auch in der That angeben, da wir uns genau so wie oben überzeugen können, dass die Funktion $\left[(E, u_i) - \frac{\partial u_i}{\partial t}\right]$ nur von $t, u_1 \dots u_{2n-2\lambda}$ abhängt. Bezeichnen wir nun diese Funktion f, die die letzte Gleichung erfüllt, mit $\psi_{\lambda+1}$, so können wir nach der früheren Methode ein $\varphi_{\lambda+1}$, dann wieder nach der jetzigen Methode ein $\psi_{\lambda+2}$ und zu diesem ein $\varphi_{\lambda+2}$ u. s. f. finden, bis wir schliesslich zu einer 2n-gliedrigen kanonischen Funktionengruppe

$$\psi_1 \dots \psi_n, \varphi_1 \dots \varphi_n$$

gelangen, deren Funktionen neben den Bedingungen

I. $$(\psi_i, \psi_k) = 0, (\varphi_i, \varphi_k) = 0, (\psi_i, \varphi_k) = 0, (\psi_i, \varphi_i) = 1 \quad (i, k = 1 \dots n)$$

den Relationen

(4) $$(E, \psi_j) = \frac{\partial \psi_j}{\partial t}, (E, \varphi_j) = \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} \quad (j = 1 \dots n)$$

genügen.

Somit haben wir nunmehr das in diesem Teile unserer Arbeit gestellte Problem erledigt. Wir haben vermittelst der Theorie der kanonischen Funktionengruppen nachgewiesen, dass stets eine Berührungstransformation

$$\psi_i = \psi_i (t, q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n), \varphi_i = \varphi_i (t, q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n) \quad (i = 1 \dots n)$$

existiert, die sämtliche Systeme der Form

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1 \dots n)$$

in Systeme derselben Form

$$\frac{d\psi_i}{dt} = \frac{\vartheta(H-E)}{\vartheta \varphi_i}, \frac{d\varphi_i}{dt} = -\frac{\vartheta(H-E)}{\vartheta \psi_i} \quad (i = 1 \dots n)$$

Digitized by Google

überführt, wenn von den Funktionen

$$\psi_1 \ldots \psi_n, \varphi_1 \ldots \varphi_n, E$$

beliebig viele vorgelegt sind und diese den Bedingungen

$$(\psi_i, \psi_k) = 0, (\varphi_i, \varphi_k) = 0, (\psi_i, \varphi_k) = 0, (\psi_i, \varphi_i) = 1,$$

$$(E, \psi_j) = \frac{\partial \psi_j}{\partial t}, (E, \varphi_j) = \frac{\partial \varphi_j}{\partial t}$$

Genüge leisten.

Digitized by Google

Vita.

Ich, Emil Camillo Grötzsch, wurde am 29. November 1874 zu Zwickau geboren, als Sohn des Oberaufsehers an der Königlichen Landesanstalt daselbst Moritz Emil Grötzsch und bin ev.-luth. Konfession. Von Ostern 1885 ab besuchte ich das Realgymnasium zu Zwickau, das ich Ostern 1894 mit dem Zeugnis der Reife verliess. Hierauf bezog ich die Universität Leipzig, um Mathematik zu studieren. Hier hörte ich Vorlesungen bei den Herren Professoren und Dozenten:

Bruns, Drude, Engel, Hofmann, Lie, Mayer, Neumann, Ratzel, Richter, Scheffers, Scheibner, Schmarsow, Volkelt, Wiedemann, Wislicenus, Wundt

und nahm teil an den Übungen der Herren:

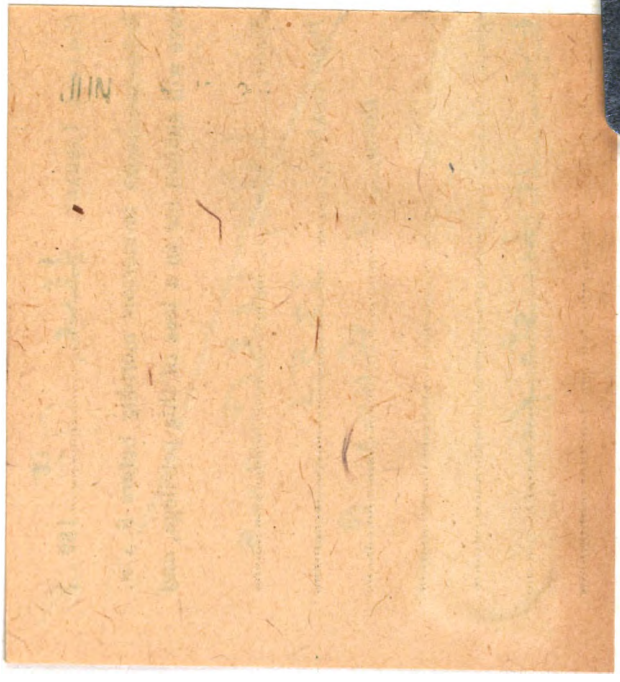
Bruns, Engel, Lie, Richter, Scheffers, Wiedemann, Wundt.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Math 4508.98.6
Storungstheorie und b
Cabot Science
3 2044 091